Kennisbasis

Rekenen-Wiskunde

Lerarenopleiding basisonderwijs

Kennisbasis Rekenen-Wiskunde voor de lerarenopleiding basisonderwijs

M. van Zanten

F. Barth

J. Faarts

A. van Gool

R. Keijzer

ELWIeR / PANAMA

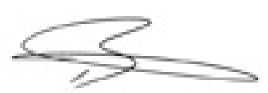
Voorwoord

De kwaliteit van ons bachelor onderwijs moet goed zijn, dit is niet alleen belangrijk voor onze studenten en het afnemende werkveld maar ook voor de Nederlandse kenniseconomie in het algemeen. Goede docenten zijn hierbij cruciaal en van de lerarenopleidingen wordt dus ook veel verwacht. Het niveau van de lerarenopleiding moet omhoog en het leerklimaat uitdagender. Om deze ambitie te kunnen realiseren moet je bij de basis beginnen, het gewenste eindniveau moet worden vastgesteld. De lerarenopleidingen voor het primair en voortgezet onderwijs hebben deze boodschap goed begrepen en zijn vorig jaar gestart met het ambitieuze project 'Werken aan Kwaliteit'. Hierin werken zij aan de kwaliteit van de lerarenopleidingen door de vakinhoudelijke en vakdidactische kwaliteit van de lerarenopleidingen in kaart te brengen. Deze set van kennisbases garandeert de basiskwaliteit van de lerarenopleidingen.

Het afgelopen jaar is door alle lerarenopleidingen met veel enthousiasme hard gewerkt aan het beschrijven van de eerste set van kennisbases. Inhoudelijke experts, deskundigen op hun vakgebied, hebben de kennisbases die door de opleidingen aan hen zijn voorgelegd bestudeerd en daar waar zij dat nodig achtten nadere aanwijzingen gegeven. Het resultaat van deze arbeid ligt nu voor u. Dit is nog maar het begin van een traject waarin de kwaliteit van de opleidingen verder versterkt wordt door de implementatie van de kennisbases in de curricula van de opleidingen. Ook worden er kennistoetsen ingevoerd waarmee wordt gemeten of studenten de kennisbasis beheersen.

Zoals gezegd is 'Werken aan Kwaliteit' een groot en ambitieus project dat een bijzondere inspanning vergt van de sector. Velen uit de sector zijn op enigerlei wijze betrokken bij de uitvoering van het project. Door het harde werk en de grote betrokkenheid van al deze mensen zijn de eerste beschrijvingen van de kennisbases een groot succes te noemen en dit sterkt mij in het vertrouwen dat de lerarenopleidingen de overige kennisbases met dezelfde voortvarendheid en in nauwe samenwerking met externe deskundigen zullen beschrijven.

Ik dank allen die hieraan hebben bijgedragen.



Doekle Terpstra
Voorzitter HBO-raad

Inhoud

1. Toelichting en verantwoording

1.1 Opdracht

Onderdeel van het projectplan van de HBO-raad 'Werken aan kwaliteit' voor de lerarenopleidingen is het formuleren van een (concept) kennisbasis rekenen-wiskunde voor de pabo. De kennisbasis beschrijft de expliciete / geboekstaafde kennis van het vak en de vakdidactiek van rekenen-wiskunde, waarvan alle startbekwame leerkrachten kennis moeten hebben, ongeacht de instelling waaraan ze hebben gestudeerd en los van het surplus aan kennis dat wordt verworven in differentiaties en specialisaties (Werken aan kwaliteit, 2008, p. 4 & 16). Het landelijk Expertisecentrum Lerarenopleidingen Wiskunde en Rekenen (ELWIeR) heeft de opdracht gekregen deze kennisbasis rekenen-wiskunde te formuleren. ELWIeR heeft hiervoor in samenwerking met PANAMA (PAbo NAscholing Mathematische Activiteiten) een projectgroep ingesteld, bestaande uit:

- Marc van Zanten, hogeschooldocent rekenen-wiskunde Hogeschool Edith Stein / Twente School of Education, projectleider PANAMA, voorzitter projectgroep;
- Frits Barth, hogeschooldocent rekenen-wiskunde Stenden Hogeschool, Christelijke pabo Leeuwarden;
- José Faarts, hogeschooldocent rekenen-wiskunde Hogeschool Zuyd, pabo Maastricht;
- Anneke van Gool, ELWIeR, PANAMA;
- Ronald Keijzer, docent rekenen-wiskunde IPABO Amsterdam/Alkmaar, ass. projectleider ELWIeR, PANAMA.

1.2 Context van de opdracht

Kwaliteit (aanstaande) leerkrachten op het gebied van rekenen-wiskunde

Er is momenteel veel aandacht voor de kwaliteit van het reken-wiskundeonderwijs. De door de bewindslieden van OC&W ingestelde Expertgroep Doorlopende Leerlijnen Taal en Rekenen (ook wel aangeduid als de 'Commissie Meijerink') wijst er in navolging van de Commissie Leraren (de 'Commissie Rinnooy Kan') op, dat er geen duidelijk zicht is op het niveau in (taal en) rekenen-wiskunde van startbekwame basisschoolleerkrachten. Zij geeft als een van haar aanbevelingen dat een gemeenschappelijk eindniveau voor (taal en) rekenen-wiskunde moet worden ontwikkeld (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a; 2008b; 2009; Commissie Leraren, 2007). In de 'Kwaliteitsagenda voor het opleiden van leraren 2008-2011' heeft de staatssecretaris van Onderwijs deze aanbeveling vertaald in haar inzet om (onder meer) de vereiste kennis voor rekenen-wiskunde aan het eind van de pabo vast te leggen in een kennisbasis (OC&W, 2008). Dit past ook binnen internationale ontwikkelingen op het gebied van vakspecifieke standaarden voor leerkrachten (zie bijvoorbeeld NCTM, 2000; NCETM, 2008; DMV/GDM/MNU, 2008) en de onder opleiders ervaren behoefte aan meer focus op rekenen-wiskunde in de opleidingen tot leerkracht basisonderwijs (Panama Kerngroep Opleiders, 2007).

Niveau rekenen-wiskunde in het basisonderwijs

Onderzoeken naar de prestaties bij rekenen-wiskunde laten een gedifferentieerd en genuanceerd beeld zien. Zo tonen de Periodieke Peilingen voor het Onderwijs (PPON) aan dat op sommige domeinen bij rekenen-wiskunde de prestaties afnemen, terwijl de prestaties op andere domeinen ongeveer gelijk blijven of toenemen (vergelijk Kraemer e.a., 2005; Janssen e.a., 2005; Van der Schoot, 2008). De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a) heeft onderzoeksgegevens geanalyseerd en stelt dat "op grond van 20 jaar onderzoek onder allerlei leeftijdsgroepen tot 15 jaar blijkt dat er geen reden is om aan te nemen dat de kwaliteit van het onderwijs in rekenen & wiskunde ter discussie moet staan omdat het beneden de maat is" (2008a, p. 7). Wel wijst de Expertgroep erop dat resultaten op onderdelen afnemen en dat (dus) op onderdelen maatregelen nodig zijn (vergelijk ook Van Putten, 2008). Het recente TIMSS-onderzoek (Meelissen & Drent, 2008) bevestigt dat sprake is van een licht dalende tendens, maar toont ook dat Nederland wereldwijd nog steeds in de top 10 staat. Verder laat dit onderzoek zien dat er tussen groepen leerlingen in Nederland grote verschillen optreden; vooral allochtone meisjes presteren opvallend lager dan autochtone meisjes en (allochtone en autochtone) jongens (Meelissen & Drent, 2008). Eerder bleken uit PPON-onderzoek ook al duidelijke verschillen in rekenprestaties tussen autochtone en allochtone leerlingen, en tussen meisjes en jongens (Kraemer e.a., 2005; Janssen e.a., 2005).

Kritiek op realistisch reken-wiskundeonderwijs

De actuele aandacht voor reken-wiskundeonderwijs vertaalt zich onder andere in kritische geluiden over de zogenoemde realistische reken-wiskundedidactiek die in de afgelopen decennia is ontwikkeld. De kritiek richt zich vooral op bepaalde deelaspecten (Van de Craats, 2007; vergelijk Uittenbogaard, 2007; 2008b; Andeweg, 2008) en bepaalde uitwerkingen (Opmeer, 2005; vergelijk Gravemeijer, 2006). Vanwege de controverse die hierover is ontstaan, heeft de Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen (KNAW) een onderzoek ingesteld naar de relatie tussen didactische aanpakken en resultaten binnen het reken-wiskundeonderwijs. Deze commissie heeft onder meer vastgesteld dat de tegenstelling tussen de traditionele en de realistische didactiek wordt overdreven en dat geen overtuigend verschil is aangetoond tussen de didactieken (KNAW, 2009). De kritiekpunten komen soms uitvergroot en contraproductief in beeld (vergelijk Siersma, 2008; Ros 2009). Hoogland (2008b) wijst erop dat vervormingen optreden, die leiden tot karikaturen die het reken-wiskundeonderwijs niet verder helpen.

Implicaties voor de kennisbasis rekenen-wiskunde

Een kennisbasis rekenen-wiskunde moet ertoe bijdragen dat startbekwame leerkrachten in hun praktijk verantwoorde inhoudelijke en didactische keuzes kunnen maken, en hun standpunt met kennis kunnen onderbouwen. Dit betekent bijvoorbeeld dat zij op de hoogte zijn van verschillende didactische aanpakken en de voor- en nadelen daarvan. Het houdt ook in dat zij de actuele discussies kunnen duiden vanuit de ontwikkeling en de geschiedenis van reken-wiskundedidactiek. Dergelijke zaken zijn dan ook verwerkt in de kennisbasis rekenen-wiskunde. Daarbij moet worden opgemerkt dat de kennisbasis nooit 'af' kan zijn en dus moet worden onderhouden.

1.3 Wat moeten (startbekwame) leerkrachten kennen en kunnen?

Het verwerven van de kennis uit deze kennisbasis is geen doel op zich. Het gaat erom dat een startbekwame leerkracht ermee kan werken in het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

Professionele gecijferdheid

Het geheel aan reken-wiskundige kennis, vaardigheden en inzichten van een (startbekwame) leerkracht wordt aangeduid met het begrip professionele gecijferdheid. Dit begrip heeft in de loop der jaren verschillende uitwerkingen gekregen (vergelijk Goffree, 1992a; Goffree & Dolk, 1995; VSLPC, 1997; Blom & Smits, 2000; 2001; Den Hertog, 2006; Oonk, 2009). Op basis van

een recent historisch en internationaal overzichtsartikel over professionele gecijferdheid (Oonk e.a. 2007) moet een startbekwame leerkracht over vier competenties beschikken om adequaat reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven. Hij/zij moet:
1. zelf voldoende rekenvaardig en 'gecijferd' zijn;
2. rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen;
3. oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren;
4. wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen.

Het gaat bij professionele gecijferdheid, kortom, om de reken-wiskundige kennis en de vakdidactische kennis, vaardigheden en inzichten die de (startbekwame) leerkracht nodig heeft om het leren van rekenen-wiskunde door basisschoolleerlingen op gang te brengen, te ondersteunen en te bevorderen (vergelijk Ball & Bass, 2000; Grossman & Schoenfeld, 2005; Hill e.a., 2007; NCETM, 2008; DMV/GDM/MNU, 2008; Ball e.a., 2008).
Bij het formuleren van de kennisbasis rekenen-wiskunde is uitgegaan van deze vakspecifieke competenties. Hieronder worden ze beknopt toegelicht. Vervolgens staat aangegeven hoe deze competenties in de kennisbasis zijn verwerkt.

Het zelf beschikken over voldoende rekenvaardigheid en gecijferdheid
De leerkracht beheerst de leerstof voor rekenen-wiskunde van de basisschool. Hij/zij kan de reken-wiskundeopgaven niet alleen instrumenteel, maar ook inzichtelijk oplossen. In verband met doorgaande leerlijnen geldt dat ook voor de rekeninhouden van de onderbouw van het voortgezet onderwijs.
In termen van de door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen (2008a; 2008b, 2009) geformuleerde referentieniveaus gaat het om niveau 3S (zie ook paragraaf Doorlopende leerlijnen rekenen).

Rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen
De leerkracht herkent reken-wiskundige zaken (getallen, getalsmatige en meetkundige aspecten en verbanden) in de eigen omgeving en in die van de kinderen (Oonk e.a., 2007). Hij/zij weegt deze en maakt ze toegankelijk voor de leerlingen (VSLPC, 1997). De leerkracht betrekt de actualiteit in het reken-wiskundeonderwijs (Goffree & Dolk, 1995) en houdt daarbij rekening met wat de leerlingen interesseert en motiveert (VSLPC 1997; Greven, 2005; Ball e.a., 2008). Hij/zij maakt gebruik van de realiteit en de actualiteit voor voorbeelden, vraagstukken en toepassingen (vergelijk Kool, 2009). Daarbij kan de leerkracht zelf de uit de realiteit gedestilleerde wiskunde met wiskundige middelen aanpakken. Hieronder valt ook de interpretatie van statistische gegevens, de weergave hiervan in grafieken en het ontmaskeren van fouten in de media (Oonk, 2009).

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren
De professioneel gecijferde leerkracht kan rekenfouten begrijpen en analyseren, en foutief of (nog) niet formeel gebruik van wiskundetaal opmerken en corrigeren. Ook is hij/zij in staat wiskundige redeneringen van leerlingen te doorgronden (Ball e.a., 2008). De leerkracht kan bij opgaven verschillende oplossingswijzen hanteren, volgen, accepteren en begrijpen; bij veel voorkomende oplossingsstrategieën kan hij/zij zowel denkstappen toevoegen als verkortingen aangeven. Ook kan de leerkracht beoordelen of oplossingsmethoden perspectief bieden voor langlopende leerprocessen rekenen-wiskunde (Van Zanten, 2007). Hetzelfde geldt voor strategieën op verschillende abstractieniveaus – contextgebonden, met modellen of materialen en formeelabstract (Kool, 2009, vergelijk Shulman, 1986). De leerkracht kan eigen en andere

aanpakken ver(ant)woorden, aan elkaar relateren en daarbij wiskundig-reflectieve vragen stellen (Oonk, 2004; 2009). Bij het oplossen van vraagstukken en het uitleggen van oplossingswijzen kan de leerkracht passende strategieën en (referentie)maten hanteren en passend(e) modellen, schema's en materialen inzetten (Oonk, 2009), geschikte voorbeelden geven en passende (oefen)vraagstukken kiezen. De professioneel gecijferde leerkracht doorziet de reikwijdte en gebruiksmogelijkheden van representaties, en kan adequaat reageren op waaromvragen van leerlingen (Ball e.a., 2008).

Wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen

De professioneel gecijferde leerkracht maakt effectief en efficiënt gebruik van zijn/haar wiskundig en didactisch repertoire. Het mathematiseren wordt als het ware verstrengeld met het didactiseren (Oonk e.a., 2007). Het gaat er daarbij om dat inhoud en activiteiten rekenwiskundig en didactisch aansluiten bij de leerlijn van de methode en bij methodeoverstijgende leerlijnen als TAL of TULE; ook leerjaaroverstijgend, in verband met de doorlopende ontwikkeling van leerlingen (vergelijk ook Ball e.a., 2008). De leerkracht stimuleert de wiskundige activiteit bij de verschillende leerprocessen, zoals problemen oplossen, verwoorden, notaties ontwikkelen, wiskundig redeneren, oefenen, toepassen, memoriseren en automatiseren (Greven, 2005; Oonk e.a., 2007). Daarbij bevordert hij/zij dat leerlingen zelfvertrouwen krijgen en positief staan tegenover rekenen-wiskunde. Verder ontwerpt en realiseert de leerkracht adaptief reken-wiskundeonderwijs. Bijvoorbeeld doordat hij/zij de reken-wiskundemethode verrijkt en aanpast, opgaven makkelijker dan wel moeilijker maakt, productieve wiskundige vragen stelt en uiteenlopende representaties hanteert (Ball e.a., 2008). De leerkracht stemt deze keuzes af op het niveau, de kennis en de vaardigheden van de leerlingen, zoals die blijken uit diagnosticerend onderwijzen, interactief lesgeven, taalgebruik van de leerlingen, observaties, en toetsen, testen, peilen, analyseren en evalueren van vorderingen (Van Eerde, 1996; Van Eerde & Hajer, 2005).

Bij dit alles maakt de leerkracht gebruik van zijn/haar kennis van kerninzichten, specifieke moeilijkheden en veel voorkomende misconcepties en gebruikelijke fouten bij de verschillende domeinen (vergelijk Shulman, 1986; Hill e.a., 2008).

Verwerking in de kennisbasis

De vier vakdidactische competenties zijn als volgt in de kennisbasis verwerkt:

1. *Het zelf beschikken over voldoende rekenvaardigheid en gecijferdheid* komt met name terug in de paragrafen Kennis van rekenen-wiskunde.
2. Het *rekenen-wiskunde betekenis kunnen geven voor kinderen* is vooral verwerkt in de (sub)paragrafen Betekenis en gebruik en Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang
3. Het *oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kinderen kunnen realiseren* komt aan de orde in de subparagrafen Modellen en schema's en Oplossingsprocessen en niveauverhoging.
4. Voor *het wiskundig denken van kinderen kunnen bevorderen* ten slotte zijn elementen uit alle paragrafen van de kennisbasis van belang. Bij deze competentie gaat het immers om de samenhang tussen mathematiseren en didactiseren.

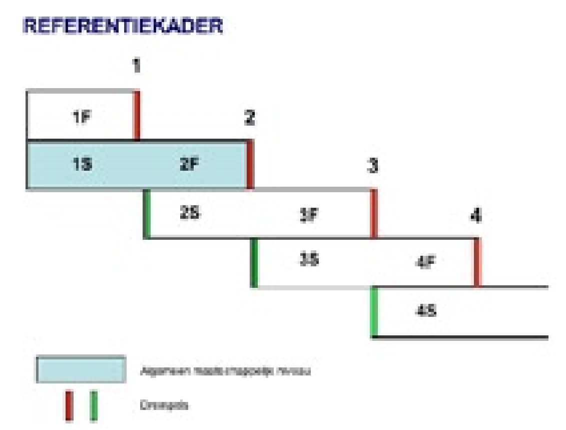
Doorlopende leerlijnen rekenen

De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a; 2008b; 2009) onderscheidt vier referentieniveaus voor taal en rekenen in de schoolloopbaan:

1. einde basisonderwijs (niveau 1);
2. eind vmbo bb/kb / mbo 1/2 (niveau 2);
3. eind havo / mbo 4 (niveau 3);
4. eind vwo (niveau 4).

Elk niveau kent een fundamenteel niveau (F) en een streefniveau (S). Niveau 2F duidt het algemeen maatschappelijk gewenste niveau aan. Niveau 3S is voor rekenen slechts ten dele geoperationaliseerd, vanwege de differentiële doelen die op dit niveau gelden, bijvoorbeeld voor technische opleidingen en pabo (2008b, p. 25). Niveau 4 is voor rekenen-wiskunde – in tegenstelling tot voor taal - niet gespecificeerd, omdat "rekenen op dat niveau helemaal in meer geavanceerde wiskunde is opgegaan" (2008b, p. 23).

De Expertgroep beveelt aan de referentieniveaus op te nemen in de bekwaamheidseisen voor de lerarenopleidingen (2008a, p. 65). Anders dan bij taal kan daarbij dus niet worden verwezen naar referentieniveau 4. Dit levert voor de kennisbasis geen probleem op, want rekenen-wiskunde in het basisonderwijs vraagt niet om beheersing van geavanceerde wiskunde maar om geavanceerde beheersing van de reken-wiskundeinhouden (vergelijk National Mathematics Advisory Panel, 2008). Voor reken-wiskundeonderwijs in het basisonderwijs gaat het bijvoorbeeld om "making mathematical sense of student work and choosing powerful ways of representing the subject so that it is understandable to students" (Ball e.a., 2008, p. 404).



Bron: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen, 2008a, p. 19.

De Expertgroep Doorlopende Leerlijnen formuleert het als volgt: "Om als leraar leerlingen in hun leerproces op weg te helpen, is het noodzakelijk dat hij/zij diepgaande kennis heeft van de vakinhoud, maar ook van manieren om die vakinhoud op verschillende manieren te presenteren aan leerlingen." (2008a, p. 64). In internationale literatuur worden in dit verband de begrippen *mathematical content knowledge en pedagogical content knowledge* gebruikt (vergelijk Shulman, 1986; Hill e.a., 2007; Silverman & Thompson, 2008; Ball e.a., 2008). Deze begrippen zijn niet los van elkaar te zien. In de kennisbasis rekenen-wiskunde zijn ze vrij vertaald als: *kennis van rekenen-wiskunde* en *kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde.*

Verwerking in de kennisbasis

De door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen geformuleerde referentieniveaus zijn op twee manieren in de kennisbasis terug te vinden. In de paragrafen *Kennis van rekenen-wiskunde* en *Kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde* komt rekenen-wiskunde als vakgebied in het basisonderwijs en (dus) object van studie op de pabo aan de orde. Hierbij gaat het om referentieniveau 1 en, in verband met de doorlopende lijn van basis- naar voortgezet onderwijs, referentieniveau 2. Op de bijgevoegde CD-Rom is de totale kennisbasis geplaatst.

Daarop is in het hoofdstuk *De kennisbasis en de referentieniveaus rekenen* het eigen beheersingsniveau centraal gesteld. Voortbouwend op het door de Expertgroep aanbevolen instroomniveau 3F bereikt de startbekwame leerkracht een beroepspecifieke invulling van referentieniveau 3S. In dit hoofdstuk is verder gedetailleerd aangegeven hoe de door de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen onderscheiden referentieniveaus rekenen in de kennisbasis zijn verwerkt.

1.4 Opbouw

De kennisbasis rekenen-wiskunde bestaat uit twee delen: *Globale theorie rekenen-wiskunde en didactiek,* en *Domeinbeschrijvingen*. In deze publicatie staan met name de domeinbeschrijvingen centraal.

Globale theorie rekenen-wiskunde en didactiek

Globale theorie van rekenen-wiskunde betreft theorieën over het leren en onderwijzen van rekenen-wiskunde in algemene zin, bijvoorbeeld over het gebruik van modellen als tussenstap van concreet naar abstract denken. Deze paragraaf beschrijft beknopt de doelen, leerprocessen en vakdidactiek bij rekenen-wiskunde.

Bij *doelen* van het vakgebied rekenen-wiskunde op de basisschool wordt ingegaan op onderscheiden waardes en nut van rekenen-wiskunde, gecijferdheid, kerndoelen, tussendoelen, doorlopende leerlijnen en referentieniveaus.

Rekenen-wiskunde op de basisschool omvat uiteenlopende *leerprocessen*, zoals betekenisconstructie en begripsvorming, problemen oplossen, verwoorden, notaties ontwikkelen, wiskundig redeneren, oefenen, toepassen, memoriseren en automatiseren.
Het gaat hierbij om langlopende wiskundige leerprocessen en leeractiviteiten, waaronder abstraheren, classificeren, schematiseren en structureren. In de kennisbasis wordt ingegaan op:

- mathematiseren en formaliseren;
- automatiseren en memoriseren;
- de rol van taal en betekenisverlening bij het leren van rekenen-wiskunde.

De *vakdidactiek* rekenen-wiskunde valt te karakteriseren aan de hand van vakdidactische noties. Een aantal van deze noties is geformuleerd in het kader van realistisch reken-wiskundeonderwijs en is uitgewerkt in de huidige reken-wiskundemethoden. Deze vakdidactische noties zijn als volgt in de kennisbasis verwerkt:

- mathematiseren vanuit betekenisvolle realiteit;
- modelleren en formaliseren;
- ruimte voor eigen inbreng van leerlingen;
- interactie, reflectie en niveauverhoging;
- verstrengeling van leerlijnen.

In de actuele aandacht voor reken-wiskundeonderwijs worden bij deelaspecten ook nuanceringen aangebracht en kritische kanttekeningen geplaatst. In de kennisbasis wordt kort ingegaan op:

- het doorschieten in uitgangspunten en vervormingen;
- de aansluiting van realistisch rekenen-wiskunde op behoeften van zwakke rekenaars;
- het kolomsgewijs rekenen en cijferend rekenen;
- de balans tussen inzicht en oefenen.

De paragraaf over vakdidactiek gaat verder in op het omgaan met verschillen bij rekenen-wiskunde, oefenen en onderhouden, en het historisch perspectief van ontwikkelingen in de didactiek van rekenen-wiskunde.

Domeinbeschrijvingen

Aansluitend op de kerndoelen voor het basisonderwijs (OC&W, 2006) en de indeling van de Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (2008a; 2008b; 2009) worden de volgende domeinen onderscheiden:

- *hele getallen* (hoofdstuk 2);
- *verhoudingen*, procenten, breuken en kommagetallen (hoofdstuk 3);
- *meten* (hoofdstuk 4);
- *meetkunde* (hoofdstuk 5);
- *verbanden* (hoofdstuk 6).

Elke domeinbeschrijving omvat een duiding van de maatschappelijke relevantie, kennis van rekenen-wiskunde en kennis voor het onderwijzen van rekenen-wiskunde, en de samenhang met andere domeinen en met andere vakgebieden.

In de domeinbeschrijving *Hele getallen* zijn bewerkingen, vormen van rekenen (hoofdrekenen, rekenen volgens standaardprocedures en cijferen, schattend rekenen en gebruik van de rekenmachine) en wiskundetaal uitgewerkt. Deze informatie wordt in de overige domeinbeschrijvingen niet herhaald; daar worden alleen steeds die zaken toegevoegd die specifiek voor het betreffende domein gelden.

Vanwege de sterke onderlinge verwevenheid start de domeinbeschrijving *Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen* met een gezamenlijk deel over de maatschappelijke relevantie van dit domein en de onderlinge verstrengeling en samenhang. Daarna volgt de beschrijving van de vier afzonderlijke subdomeinen.

De opbouw van de paragrafen *Kennis van rekenen-wiskunde* en *Kennis voor onderwijzen van rekenen-wiskunde* is bij alle domeinen zo veel mogelijk gelijk gehouden. Echter, vanwege de specifieke kenmerken van de domeinen *Meten, Meetkunde* en *Verbanden* wijkt de indeling bij deze domeinbeschrijvingen af.

1.5 Beperking

Het begrip 'kennisbasis' kent verschillende invullingen, variërend van een verzameling kennis van vakinhouden 'die je kunt weten' tot het geheel van competenties van de leraar. Hierbij moet worden opgemerkt dat de begrippen 'data', 'informatie', 'kennis' en 'competenties' vaak door elkaar worden gebruikt, elkaar soms overlappen en, afhankelijk van het ingenomen kentheoretisch standpunt, verschillend worden geïnterpreteerd. (Cauwenberghe, 2008).
In de opdracht voor het vaststellen van de kennisbasis rekenen-wiskunde is het begrip 'kennisbasis' ingevuld als: de expliciete / geboekstaafde kennis van het vak en de vakdidactiek van rekenen-wiskunde, waarvan alle startbekwame leerkrachten kennis moeten hebben. Kennis van de leerling, van leren en van onderwijzen valt buiten het bereik van de opdracht (Werken aan kwaliteit, 2008, p. 4). Vanwege deze beperking wordt in deze kennisbasis niet ingegaan op pedagogische of organisatorische aspecten die evenzeer van belang zijn voor het reken-

wiskundeonderwijs. Zo worden relevante leertheorieën alleen genoemd en niet uitgewerkt. Die theorieën liggen wel ten grondslag aan het onderwijzen van rekenen-wiskunde en behoren dus evenzeer onderdeel van de opleiding tot leerkracht te zijn.
De volgende zaken zijn niet in de kennisbasis opgenomen of worden enkel aangestipt:

- ambachtelijke en organisatorische kennis voor het verzorgen van reken-wiskundeonderwijs;
- kennis van specifieke reken-wiskundemethoden en additionele materialen;
- toetsen, testen en observeren bij rekenen-wiskunde;
- rekenen-wiskunde binnen de één-zorgroute en specifieke orthodidactiek rekenen-wiskunde;
- rekenen-wiskunde voor kinderen met ernstige reken-wiskundeproblemen en dyscalculie (ERWD);
- rekenen-wiskunde voor meerbegaafde en hoogbegaafde rekenaars;
- rekenen-wiskunde binnen traditioneel vernieuwingsonderwijs en moderne vernieuwingsscholen;
- voor rekenen-wiskunde potentieel relevante neuropsychologische theorieën.

1.6 Verwijzingen en voorbeelden

Voorbeelden worden in deze kennisbasis weergegeven in oranje kaders en verwijzingen zijn op twee niveaus opgenomen. In de eerste plaats zijn daar verwijzingen die dienst doen als (wetenschappelijke) verantwoording van de inhoud van de kennisbasis. Dit zijn verwijzingen naar zo origineel mogelijke bronnen. Daarnaast zijn verwijzingen opgenomen naar literatuur die geschikt is als bron voor studenten. Dit zijn steeds zo recent mogelijke bronnen.
NB: deze verwijzingen zijn uit deze samenvatting weggelaten omwille van de leesbaarheid. Alle verwijzingen zijn terug te vinden op de bijgevoegde CD-Rom.

De volledige lijst met bronnen is opgenomen achterin de volledige kennisbasis die op de CD-Rom is geplaatst. Literatuur die geschikt is als bron voor studenten, is aangegeven met een *.

2. Hele getallen

In dit hoofdstuk wordt de kennis van hele getallen en van bewerkingen omschreven. De behandelde bewerkingen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen) en de onderscheiden vormen van rekenen (hoofdrekenen, rekenen volgens standaardprocedures en cijferen, schattend rekenen en gebruik van de rekenmachine) zijn ook relevant voor de overige domeinen. Bij de overige domeinbeschrijvingen worden alleen die zaken toegevoegd die specifiek van toepassing zijn op het betreffende domein. Hetzelfde geldt voor de in dit hoofdstuk beschreven wiskundetaal.

2.1 Kennis van hele getallen

De startbekwame leerkracht heeft kennis van en inzicht in het domein hele getallen. Daarbij gaat het om getallen, getalrelaties en redeneren en rekenen met hele getallen. De startbekwame leerkracht kan vlot hoofdrekenen, rekenen met gebruik van de eigenschappen van getallen en bewerkingen, schattend rekenen, cijferend rekenen, rekenen met overige standaardprocedures en de rekenmachine met inzicht gebruiken. Hij/zij kan bij verschillende situaties en opgaven een beredeneerde keuze maken tussen verschillende rekenwijzen, waaronder ook schattend rekenen en het gebruik van de rekenmachine.

Betekenis van hele getallen

De startbekwame leerkracht kent de betekenissen, verschijningsvormen en eigenschappen van getallen en van getalrelaties. Hij/zij is op de hoogte van de overeenkomsten en verschillen tussen de getalsystemen. Hij/zij overziet de specifieke eigenschappen van een systeem en heeft inzicht in het decimaal positioneel getalsysteem.

Hoewel dit niet tot de leerstof van de basisschool behoort, kan de startbekwame leerkracht eigenschappen van getallen verklaren, zoals de kenmerken van deelbaarheid. Dit met het oog op de doorlopende leerlijn van de basisschool naar het voortgezet onderwijs. Verder is een startbekwame leerkracht in staat om getallen uit een ander talstelsel om te zetten naar het decimale talstelsel en omgekeerd.

Eigenschappen van bewerkingen

De startbekwame leerkracht kent de betekenissen en de eigenschappen van de basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, en is op de hoogte van de onderliggende wiskundige structuren.

> Vermenigvuldigen kan betekenissen hebben als herhaald optellen, combineren, gelijke sprongen maken en op schaal vergroten. Onderliggende wiskundige structuren zijn bijvoorbeeld de lijnstructuur, groepsstructuur en rechthoekstructuur.

Eigenschappen van de basisbewerkingen die kunnen worden gebruikt bij het opereren met getallen, zijn bijvoorbeeld:
- de commutatieve of verwisseleigenschap bij vermenigvuldigen;
- de associatieve eigenschap bij vermenigvuldigen;
- de distributieve of verdeeleigenschap voor vermenigvuldigen;
- de inverse-relatie tussen vermenigvuldigen en delen.

Kennis die niet geheel tot de leerstof van de basisschool behoort, maar waar de startbekwame leerkracht wel over beschikt, betreft bijvoorbeeld het kunnen redeneren en rekenen met negatieve hele getallen.

Schattend rekenen

Schattend rekenen is het globaal bepalen van de uitkomst van een berekening met afgeronde getallen. Het moet ook worden gebruikt als de benodigde gegevens niet of niet volledig beschikbaar zijn.

De startbekwame leerkracht kan bij opgaven een beredeneerde keuze maken tussen schattend rekenen en precies rekenen. Bij schattend rekenen kiest hij/zij voor passende afrondingen.

Cijferend rekenen

De startbekwame leerkracht beheerst de standaardprocedures en algoritmes voor de vier hoofdbewerkingen. Hij/zij doorziet de relatie en samenhang tussen meer en minder verkorte procedures, en tussen standaardprocedures en andere vormen van rekenen.

Gebruik van de rekenmachine

De startbekwame leerkracht kan de rekenmachine met inzicht gebruiken om:
- snel berekeningen uit te voeren;
- lastige berekeningen, bijvoorbeeld met grote getallen, te maken;
- uit het hoofd of op papier gemaakte berekeningen te controleren.

Hoewel dit niet tot de leerstof van de basisschool behoort, kan de startbekwame leerkracht met de rekenmachine meer geavanceerde bewerkingen uitvoeren. Bijvoorbeeld met behulp van de procentenknop en het gebruik van het geheugen.
Deze kennis is nodig met het oog op de doorlopende leerlijn van de basisschool naar het voortgezet onderwijs.

Wiskundetaal bij (hele) getallen

De startbekwame leerkracht beheerst de wiskundetaal bij (hele) getallen, zoals de aanduidingen voor de getallen, de telwoorden uit de telrij en de systematiek van het decimaal positioneel getalsysteem.
Symbolen waarmee relaties tussen getallen en hoeveelheden worden aangegeven, zijn bij-voorbeeld +, -, x, :, =, ↓, <, >, (,), H, T, E, ^{2}, ^{3}.
Bij het aanduiden van bewerkingen met hele getallen loopt de betekenis binnen de meer formele taal bij rekenen-wiskunde niet altijd parallel met de betekenis in de spreektaal. Denk aan ‘splitsen van getallen’ en ‘tellen met sprongen’. De term hoofdrekenen heeft op de basisschool een bredere betekenis dan alleen ‘uit’ het hoofd rekenen.

De startbekwame leerkracht kan betekenis geven aan formele begrippen die niet tot de leerstof van de basisschool worden gerekend, zoals positioneel systeem, decimaal systeem, positie-waarde, ordinaal en kardinaal.

2.2 Kennis voor het onderwijzen van hele getallen: getallen en getalrelaties

Contextgebonden handelen en redeneren bij getallen en getalrelaties

De ontwikkeling van elementair getalbegrip en ontluikende gecijferdheid, waarin het tellen een belangrijke rol speelt, omvat het grip krijgen op allerlei betekenissen, functies, structuren en eigenschappen van getallen. Bij het verkennen van getallen en getalrelaties wordt dan ook gebruikgemaakt van allerlei verschijningsvormen en functies van getallen die kinderen kunnen tegenkomen in het dagelijks leven. Dit zijn voornamelijk benoemde getallen en meetgetallen. De startbekwame leerkracht kan rijke leeromgevingen creëren, waarin de ontluikende gecijferdheid van kinderen optimale kansen krijgt om tot ontwikkeling te komen. Hij/zij kan bijvoorbeeld spontane telactiviteiten van kinderen stimuleren en deze momenten aangrijpen voor het verder leren van individuele kinderen en de hele groep. Tevens kan hij/zij vooropgezette, doelgerichte tel- en rekenactiviteiten organiseren.

Objectgebonden handelen en redeneren bij getallen en getalrelaties

De startbekwame leerkracht besteedt aandacht aan de volgende aspecten:

- aantallen tellen en hoeveelheden bepalen;
- synchroon tellen;
- het besef dat bij het tellen van een hoeveelheid het laatst gebruikte getal de hoeveelheid aangeeft (koppeling ordinaal en kardinaal getal);
- resultatief tellen;
- tellen met sprongen;
- verkort tellen.

Niveauverhoging bij getallen en getalrelaties

Om kinderen te ondersteunen in hun denken en hun niveau te verhogen, kan de startbekwame leerkracht flexibel wisselen tussen contextgebonden tellen en rekenen, objectgebonden tellen en rekenen, en formeel tellen en rekenen. Hij/zij besteedt aandacht aan:

- de structuur van de getallen;
- de positie van de getallen;
- talstelsels, priemgetallen en het ontbinden van getallen in factoren (in de bovenbouw);
- betekenissen, structuren en onderlinge relaties van getallen.

2.3 Kennis voor het onderwijzen van hele getallen: (elementair) hoofdrekenen

Kinderen leren de betekenis van de vier basisbewerkingen die met hele getallen worden uitgevoerd: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Ze leren hoe zij deze bewerkingen kunnen uitvoeren, aanvankelijk contextgebonden en uiteindelijk op formeel niveau, maar ook in nieuwe toepassingssituaties. Zij leren hoe zij daarbij gebruik kunnen maken van de eigenschappen van de afzonderlijke bewerkingen en getallen.

Hoofdrekenen is inzichtelijk rekenen met getallen, waarbij de waarde van de getallen bij de berekening in beeld blijft en handig gebruik wordt gemaakt van parate kennis, eigenschappen van getallen en bewerkingen en de onderlinge relaties.

Globaal worden twee varianten van hoofdrekenen onderscheiden: het mét het hoofd rekenen en het úit het hoofd rekenen.

Er zijn drie grondvormen van hoofdrekenen:
1. het rijgend hoofdrekenen, bijvoorbeeld: 36 + 12 → 36 + 10 → 46 + 2 = 48;
2. het splitsend hoofdrekenen, bijvoorbeeld: 36 + 12 → 30 + 10 = 40 → 6 + 2 = 8 → 40 + 8 = 48;
3. het gevarieerd of handig hoofdrekenen, bijvoorbeeld compenseren: 73 – 29 → 74 - 30.

De strategieën bij het hoofdrekenen kunnen worden ondersteund met passende contexten. Dit geldt voor alle drie de grondvormen.

Betekenis en gebruik bij (elementair) hoofdrekenen

Contexten geven betekenis aan het redeneren en rekenen met hele getallen, en bieden een handvat voor rekenen in toepassingssituaties.

> De strategie compenseren werkt bij optellen anders dan bij aftrekken (145+98 = 143+100 en 145-98 = 147-100). Voor kinderen is dit complex. Betekenisverlenende contexten als een tribunecontext of een leeftijdcontext kunnen hierbij helpen.

Modellen en schema's bij (elementair) hoofdrekenen

Modellen en schema's spelen een rol bij de overgang van contextgebonden naar formeel redeneren en rekenen; het horizontaal mathematiseren. De getallen tot honderd worden gestructureerd met het lijnmodel, bijvoorbeeld de (lege) getallenlijn en het groepjesmodel. (Het lijnmodel kan op verschillende niveaus worden gebruikt: 'vol' (met eenheden), 'halfvol' (met tientallen) en 'leeg' (zonder getallen). Met het lijnmodel leren kinderen zich steeds beter te oriënteren op de getallenlijn. Het model past goed bij lineaire situaties zoals afstanden. Een alternatief voor de (kaartjes)getallenlijn is het zogenoemde boek met 130 bladzijden. Met het groepjesmodel leren de kinderen grote hoeveelheden te schatten en handig te tellen door het maken van bijvoorbeeld groepjes van tien. Deze modellen worden ook gebruikt bij het optellen en aftrekken.

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij (elementair) hoofdrekenen

Om kinderen te ondersteunen in hun denken en hun niveau te verhogen kan de startbekwame leerkracht flexibel wisselen tussen verschillende concretiseringen en oplossingswijzen. Tot groep 5 is alle rekenen hoofdrekenen, in de zin van rekenen mét het hoofd. De vier basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen worden in de groepen 3, 4 en 5 verkend en geoefend. Daarna worden kinderen gestimuleerd om voor specifieke getalgebieden bewerkingen ook uit het hoofd te gaan uitvoeren. Alle optellingen en aftrekkingen tot 20 worden geautomatiseerd en gememoriseerd, evenals de tafels van vermenigvuldiging. Deze basale rekenfeiten worden voortdurend onderhouden, geconsolideerd en uitgebreid.

De overgang van het structurerend vermenigvuldigen naar het formeel vermenigvuldigen wordt bevorderd door het steeds beter leren redeneren over getalrelaties, rekeneigenschappen en reeds gekende tafelproducten. De leerlingen maken hierbij gebruik van strategieën en steunpunten. Twee-keer, tien-keer en vijf-keer zijn steunpunten en van daaruit kunnen andere sommen worden berekend. Als de kinderen alle antwoorden van een tafel met behulp van steunpunten en strategieën kunnen berekenen, wordt dit net zo lang herhaald totdat de kennis is geautomatiseerd. Dit gebeurt met regelmatig terugkerende, korte en gevarieerde oefenmomenten. Ten slotte worden alle tafelproducten gememoriseerd en uitgebreid tot boven de tien, en worden de toepassingen van de basisoperaties vermenigvuldigen en delen verbreed.

De startbekwame leerkracht kan hoofdrekenen en beheerst de opbouw van de leerlijnen. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven. De startbekwame leerkracht beschikt over een uitgebreid repertoire aan oefenvormen. Hij/zij is in staat om in alle jaargroepen de hoofdrekenkennis uit eerdere jaren te onderhouden en gebruikt hiervoor gevarieerde oefeningen, die passen bij het niveau van de kinderen.

2.4 Kennis voor het onderwijzen van hele getallen: standaardprocedures waaronder cijferen

Standaardprocedures zijn er in verschillende vormen. De kerndoelen geven aan dat leerlingen de vier basisbewerkingen (onder andere) leren oplossen door 'meer of minder verkorte' standaardprocedures. Dat kan cijferen – het meest verkorte standaardalgoritme – zijn of een minder verkorte vorm. Er zijn globaal drie didactische aanpakken te onderscheiden: kolomsgewijs leren rekenen, leren cijferen via progressief schematiseren en regelgeleid leren cijferen. Daarbinnen zijn variaties mogelijk.

De verschillende didactische aanpakken hangen samen, ook in de te bereiken doelen. De startbekwame leerkracht kent de aanpakken én de voor- en nadelen hiervan, voor zover deze door onderzoek bekend zijn. Enkele voorbeelden:

- Regelgeleid cijferen aanleren beperkt zich tot procedurele aanwijzingen, die bij verschillende getallen feitelijk steeds anders moeten zijn (vanwege bijvoorbeeld lenen en inwisselen). De aanwijzingen zijn daardoor maar beperkt generaliseerbaar en maken bovendien niet zichtbaar waarom de procedure werkt.
- Verkorting bij progressief schematiseren en kolomsgewijs vermenigvuldigen en delen zijn noodzakelijk. Kinderen zullen niet altijd uit zichzelf de meest efficiënte strategie ontdekken. Leerlingen die bijvoorbeeld dreigen te volharden in uitgebreide en lange procedures, moeten worden gestimuleerd tot verkortingen.

Welke standaardprocedure het meest efficiënt is en als einddoel kan worden beschouwd, kan per kind verschillen. De verschillen in effectiviteit (de kans om tot een goed antwoord te komen) tussen cijferen en kolomsgewijs rekenen zijn voor de meeste leerlingen beperkt. De effectiviteit van uitwerkingen wordt (veel) meer beïnvloed door het al dan niet noteren van de uitwerking op papier.

Modellen en schema's bij standaardprocedures waaronder cijferen

De verkorte vormen van noteren die bij het cijferen worden gebruikt, steunen sterk op (inzicht in) het decimale positiesysteem. Cijfers moeten steeds op de positie die overeenkomt met hun waarde worden genoteerd. Aanvankelijk kunnen hierbij schema's worden gebruikt, gebaseerd op de positiewaarde van de cijfers, bijvoorbeeld het positieschema H T E. De onderliggende positiewaarden kunnen worden geconcretiseerd met geld of eventueel additieve hulpmiddelen, zoals M.A.B.-materiaal. Dit materiaal kan worden ingezet om de positiewaarde van de cijfers te visualiseren, niet om daadwerkelijk mee te tellen.

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij standaardprocedures waaronder cijferen

Het onderscheid tussen kolomsgewijs rekenen en cijferen biedt aanknopingspunten voor differentiatie. Bijvoorbeeld in de mate van verkorting die van verschillende leerlingen wordt verwacht.
Voor het rekenen met standaardprocedures moeten kinderen optellingen en aftrekkingen tot twintig en de tafels van vermenigvuldiging hebben geautomatiseerd of gememoriseerd. Verder moeten ze voor het cijferen de positiewaarden van de cijfers binnen een getal kunnen benoemen.
Het honoreren van informele aanpakken in het begin van het leerproces heeft (alleen) zin wanneer deze perspectief bieden voor verdere schematisering en verkorting. Uitwisselen van verschillende aanpakken van de leerlingen kan bijdragen aan het proces van verkorting, als in de aan de orde gestelde aanpakken bijvoorbeeld grotere deelstappen worden gezet.

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis die nodig is voor het onderwijzen van de standaardprocedures uit deze paragraaf en beheerst daarnaast de opbouw van de verschillende leerlijnen, inclusief mogelijke variaties. Hij /zij kent de voor- en nadelen van de verschillende standaardprocedures. Hij/zij heeft didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's en verkortingen. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskundeonderwijs te kunnen realiseren. Hij/zij stimuleert kinderen om na te denken over de onderlinge relaties tussen verschillende aanpakken.

2.5 Kennis voor het onderwijzen van hele getallen: schattend rekenen

De twee belangrijkste vormen van schattend rekenen zijn:
- het rekenen met afrondingen van precies gegeven getallen met de bedoeling een globaal antwoord te vinden;
- het rekenen waarbij de benodigde gegevens niet of niet volledig beschikbaar zijn.

Leerlingen leren schattend rekenen, maar leren ook te bepalen wanneer precies rekenen de voorkeur heeft of zinvol is. Schattend rekenen heeft daarnaast een didactische functie bij het precies leren rekenen, zoals bij het vooraf inschatten van het antwoord van een opgave of bij het achteraf schattend controleren van een precies berekende opgave.

Bij zowel schattend tellen als bij schattend rekenen gaat het erom dat moeilijk te bepalen hoeveelheden of lastige getallen overzichtelijk en hanteerbaar worden gemaakt. Dat kan door hoeveelheden te vergelijken met bekende aantallen, door ze handig te structureren of door getallen af te ronden. Wat hanteerbaar is, hangt af van de telstrategieën, de (bij de context passende) referentieaantallen, getallen en maten en de rekenfeiten, basisbewerkingen en referentiegetallen en –maten waarover de leerling beschikt.

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij schattend rekenen

Bij het schattend rekenen worden de volgende onderdelen onderscheiden: afronden van getallen, schattend rekenen met de basisbewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen, en schattend rekenen met onvolledige gegevens. Er zijn drie fasen: de informele fase, de regelgeleide fase en de flexibele fase.
Om kinderen te ondersteunen in hun denken en hun niveau te verhogen, kan de startbekwame leerkracht flexibel wisselen tussen deze drie fasen.
Bij schattend rekenen met onvolledige gegevens moeten leerlingen naast het afronden en rekenen met ronde getallen ook zelf bij de situatie passende getallen kiezen, waarbij de grootte van de getallen al min of meer is afgebakend of een appél wordt gedaan op hun maatkennis.

> Er is een file van 3 kilometer. Hoeveel auto's staan er ongeveer in die file? Om een schatting te kunnen maken, moet je weten dat een auto ongeveer 5 meter lang is en moet je daarnaast aannamen doen over de tussenruimte tussen de auto's, één of twee rijbanen, wel of geen vrachtauto's, enzovoort.

2.6. Kennis voor het onderwijzen van (hele) getallen: gebruik van de rekenmachine

Om de rekenmachine goed te kunnen gebruiken, moeten leerlingen inzicht hebben in de structuur van het getallen- en rekensysteem. De startbekwame leerkracht kan hen begeleiden bij het leren werken met de rekenmachine. In de didactiek worden drie functies onderscheiden:

- de onderzoeksfunctie (het onderzoeken van de (on)mogelijkheden van de rekenmachine);
- de didactische functie (het gebruik van de rekenmachine om op een andere manier het inzicht in de structuren van ons getalsysteem en de operaties te verdiepen);
- het gebruik van de rekenmachine als rekenhulpmiddel.

Bij een hoofdrekendictee gaan de kinderen na bij welke opgaven het handig is om de rekenmachine te gebruiken en bij welke opgaven het berekenen uit het hoofd sneller gaat. Bij het schattend rekenen controleren de kinderen met de rekenmachine hun schatting van opgaven zoals 39 x 62. Omgekeerd gaan zij met een schatting na of een uitkomst die is verkregen met een rekenmachine kan kloppen.

De startbekwame leerkracht kent de voor- en nadelen van verschillende vormen van gebruik van de rekenmachine. Hij/zij kan beoordelen in welke gevallen de rekenmachine nodig is en waar dat van afhangt.

2.7. Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang hele getallen

Hele getallen komen in het dagelijks leven in veel situaties en in verschillende betekenissen voor. Er wordt regelmatig een beroep gedaan op begrip van en bewerkingen met hele getallen, bijvoorbeeld bij het bekijken van reclamefolders, boodschappen doen, klussen, sporten, de krant lezen of televisie kijken. We komen getallen tegen als het gaat om lengte, gewicht, oppervlakte, inhoud, tijd, voedsel, bladzijdenummers, temperatuur, geld, (huis)nummers, nummers op trein en bus, leeftijd, burgerservicenummer en samengestelde grootheden.

Verstrengeling van hele getallen met andere reken-wiskundedomeinen

- Bij toepassingen is het zinvol om te bepalen welke vorm van rekenen het meest voor de hand ligt, effectief of snel is: hoofdrekenen, schattend rekenen, schriftelijk rekenen of gebruikmaken van de rekenmachine.
- Veel meetgetallen kunnen hele getallen zijn, afhankelijk van de eenheid of maat die wordt gehanteerd.
- Het redeneren en rekenen met kommagetallen wordt vereenvoudigd door de analogie met hele getallen, mits de decimale structuur wordt doorzien. Dit geldt zowel voor hoofdrekenen als cijferen met kommagetallen, bijvoorbeeld door komma's bij de berekening weg te denken en daarna met behulp van een beredeneerde schatting op de juiste plek te plaatsen.

Gebruik van hele getallen bij andere vak- en vormingsgebieden

Bij het vak mens & maatschappij worden de verschillende soorten officiële nummers (naamgetallen) besproken, bijvoorbeeld postcode, pincode en kentekens. Er worden ook getallen gebruikt waarmee wel geredeneerd en gerekend kan worden, zoals jaartallen.

3. Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen

Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen zijn nauw met elkaar verweven. Wiskundig gezien zijn er grote overeenkomsten tussen verhoudingen, gebroken getallen en procenten. Zo valt aan allemaal een relatief aspect te onderscheiden. Kommagetallen en breuken zijn beide notatiewijzen van rationale getallen. Het overkoepelende begrip bij dit domein is het begrip verhouding.

Vanwege de sterke onderlinge verwevenheid start dit hoofdstuk met maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen. In de hiernavolgende hoofdstukken volgt de beschrijving van de vier afzonderlijke subdomeinen. Hoewel breuken en kommagetallen wiskundig gezien grotendeels overeenkomen, zijn er in het leren ervan op de basisschool grote verschillen. Daarom worden ze hier, aansluitend op literatuur en onderwijspraktijk, als afzonderlijke subdomeinen onderscheiden.

Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen

In het dagelijks leven komen we veelvuldig in aanraking met verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen. Bij het verwerken van getalsmatige informatie worden verhoudingen en breuken vaak gebruikt om een relatief deel ten opzichte van een totaal aan te geven. Breuken worden meestal gebruikt voor eenvoudige verhoudingssituaties, zoals de helft, 1/2, 1/4 , 3/4.

In andere situaties wordt vaak overgestapt op het gebruik van procenten. Bijvoorbeeld in het krantenbericht hieronder, waar breuken en percentages worden gebruikt om het relatieve deel van het totale aantal ouders aan te geven.

Een derde ouders heeft zorgen over opvoeding

DEN HAAG (ANP) - Ruim een derde van alle ouders met thuiswonende kinderen heeft zorgen over de opvoeding. Van alle ouders heeft 11 procent zelfs het gevoel de opvoeding niet goed aan te kunnen.

Deze onderzoeksresultaten presenteerde het CBS woensdag in het Jaarrapport 2008 van de Landelijke Jeugdmonitor van het CBS. Minister André Rouvoet (Jeugd en Gezin) heeft het rapport in ontvangst genomen.

Ouders maken zich vooral zorgen over emotionele problemen, gedragsproblemen en ongehoorzaamheid. Alleenstaande ouders zijn doorgaans minder tevreden over de opvoeding dan tweeoudergezinnen. Meer dan de helft van de ondervraagde eenoudergezinnen gaf aan zich in het afgelopen jaar zorgen te hebben gemaakt over de opvoeding. Bij tweeoudergezinnen ging het om ongeveer een derde.

Bron: Metro, 3-12-2008.

Verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen hebben eigen verschijningsvormen en toepassingen. De notatie van kommagetallen bijvoorbeeld komt overeen met die van geld.

Breuken komen vooral voor in verdeelsituaties en kommagetallen in meetsituaties. Procenten worden gebruikt bij het aangeven van een deel van een totaal, bij korting en rente, terwijl korting weer niet of nauwelijks wordt uitgedrukt met breuken of kommagetallen.

Het overkoepelende begrip bij dit domein is het begrip verhouding. Ook breuken, procenten en kommagetallen beschrijven in zekere zin verhoudingen. Breuken geven de verhouding aan tussen een deel en het geheel, bijvoorbeeld 1 op de 3 als 1/3 deel. Een percentage geeft de verhouding aan van een deel tot een geheel dat op honderd wordt gesteld, bijvoorbeeld 1/4 deel is hetzelfde als 25/100 deel, ofwel 25%. Kommagetallen zijn vaak meetgetallen die de verhouding aangeven ten opzichte van een bepaalde maat, bijvoorbeeld 0,4 meter.

Standaardisering

De notatie van procenten, breuken en kommagetallen verschilt, maar ze worden, afhankelijk van de situatie, naast elkaar gebruikt. Niet willekeurig, maar afhankelijk van wat het beste uitkomt; eenvoudige delen kunnen vaak met breuken worden aangeduid, maar doordat kommagetallen en procenten gestandaardiseerd zijn, kan daarmee eenvoudiger worden vergeleken.

Relatieve en absolute gegevens

Absolute gegevens zijn gegevens waarbij de getallen verwijzen naar daadwerkelijke hoeveelheden of aantallen. Relatieve gegevens zijn verhoudingsgegevens waarbij de getallen verwijzen naar iets ten opzichte van een ander geheel of totaal. Voor kinderen is dit een cruciaal en lastig onderscheid. De startbekwame leerkracht doorziet deze moeilijkheden en ondersteunt het leren van kinderen. Te denken valt bijvoorbeeld aan:

- Getalsmatige verhoudingen bieden relatieve gegevens; ze hebben betrekking op elkaar en op een totaal.

> Benzineverbruik van 1 op 18 betekent dat het rijden van 18 kilometer, 1 liter benzine kost. Om te berekenen hoeveel benzine je nodig hebt voor een bepaalde reis, moet je het aantal af te leggen kilometers weten. En omgekeerd: om na te gaan hoever je nog kunt rijden, moet je weten hoeveel liter benzine er nog
> in de tank zit. Verhoudingsgetallen kunnen dus als operator fungeren, afhankelijk van het absolute uitgangsgegeven dat bekend is.

- Percentages zijn verhoudingsgetallen; de reële grootte is afhankelijk van de grootte van het getal of het geheel waarop zij betrekking hebben. Een percentage biedt dus relatieve informatie en fungeert altijd als operator.
- Breuken hebben zowel een relatief als een absoluut karakter. Het relatieve karakter komt tot uitdrukking als breuken verwijzen naar iets anders (een geheel, een aantal, een meetresultaat). Als het totaal bekend is, fungeert de breuk als operator. Het absolute karakter komt tot uitdrukking als de breuk wordt beschouwd als een rationaal getal; een punt op de getallenlijn of een formeel getal waarmee kan worden gerekend.
- Kommagetallen geven in hun verschijningsvorm van meetgetal de verhouding aan tussen datgene wat beschreven wordt en de eenheid waaraan wordt gerefereerd. Er is dan sprake van een benoemd getal. Het absolute karakter komt, evenals bij breuken, tot uitdrukking als het kommagetal wordt beschouwd als rationaal getal.

(Getals)relaties tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen

De (getals)relaties tussen de subdomeinen onderling (zoals 4/10= 0,4 en 0,4 keer iets komt overeen met 40% van datgene) komen in het leerproces van kinderen van pas bij het rekenen en redeneren, en behoren daarom zelf ook tot de leerstof. Daarbij ligt de nadruk op inzichtelijk (hoofd)rekenen.

- Het doorzien en begrijpen van (getals)relaties ondersteunt het leren ervan. Als verbanden kunnen worden beredeneerd, hoeven namelijk minder rekenfeitjes als afzonderlijke feiten te worden geleerd.
- Breuken en kommagetallen kunnen als punt op de getallenlijn worden geplaatst. Percentages strikt genomen echter niet, omdat dit geen absolute getallen zijn. Een percentage is een operator en kan dus alleen in verband worden gebracht met een breuk of kommagetal als operator. Bijvoorbeeld: 1/5 deel van ... komt overeen met 20% van ... Op een strook of dubbele getallenlijn kunnen percentages wel worden gevisualiseerd in relatie tot breuken of kommagetallen.
- Breuken en kommagetallen kunnen in elkaar worden omgerekend.

De startbekwame leerkracht heeft kennis van en inzicht in de samenhang tussen verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen. Hij/zij kent veel voorkomende (getals)relaties en kan bij het rekenen en redeneren flexibel tussen deze subdomeinen wisselen.

Hoewel dit niet tot de leerstof van de basisschool behoort, kan de startbekwame leerkracht (minder gebruikelijke) breuken in kommagetallen omrekenen en omgekeerd. Ook kent hij/zij de notatie van repeterende breuken. Deze kennis is nodig met het oog op de doorlopende leerlijn van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs.

3.1 Verhoudingen

3.1.1 Kennis van verhoudingen

De startbekwame leerkracht heeft kennis van en inzicht in verhoudingen, waaronder de samenhang met procenten, breuken en kommagetallen.

Betekenis van verhoudingen

Een verhouding is een evenredig verband tussen twee of meer getalsmatige of meetkundige beschrijvingen. Bijvoorbeeld: schaal (plattegronden, landkaarten en maquettes), benzineverbruik (de auto verbruikt 1 op 18) en samengestelde grootheden zoals prijs per eenheid (1 kilo gehakt kost €...) of snelheid (80 kilometer per uur). Er zijn interne en externe verhoudingen. Verhoudingen mogen niet worden verward met niet-evenredige verbanden, zoals het verband tussen lengte en oppervlakte bij vergroting of verkleining van een object.
Er zijn bepaalde (meetkundige) bijzondere verhoudingen, zoals de gulden snede (Φ) en de verhouding tussen de omtrek en diameter van een cirkel (π).

Redeneren en rekenen met verhoudingen

Verhoudingen kunnen met hele getallen worden genoteerd in de zogenoemde verhoudingsnotatie, bijvoorbeeld 2 : 3. Bij het redeneren en rekenen met zulke verhoudingsgetallen moet de onderlinge verhouding intact blijven. Als het ene verhoudingsgetal wordt vergroot of verkleind, moet het andere verhoudingsgetal met dezelfde factor worden vergroot of verkleind. Hierbij kan van de basisbewerkingen delen en vermenigvuldigen gebruik worden gemaakt. De basisbewerkingen optellen en aftrekken kunnen alleen worden uitgevoerd binnen grootheden (of verhoudingsgetallen die op hetzelfde betrekking hebben).

Hoewel dit niet (geheel) tot de leerstof van de basisschool behoort, kan de startbekwame leerkracht kruiselings vermenigvuldigen binnen een verhoudingstabel en heeft hij/zij inzicht in deze werkwijze (Wijers, 2009). Deze kennis is nodig met het oog op de doorlopende leerlijn van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs.

Wiskundetaal bij verhoudingen

Verhoudingen kunnen worden beschreven in verhoudingentaal, in breukentaal of met procenten en kennen verschillende notatievormen.

In spreektaal verwijzen uitdrukkingen naar (de betekenis van) verhoudingen. De startbekwame leerkracht kan dit informele taalgebruik gebruiken voor de ontwikkeling van formele wiskundetaal.

Voor het ordenen van de leerstof beheerst de startbekwame leerkracht formele begrippen die niet tot de leerstof van de basisschool worden gerekend, waaronder interne en externe verhouding, evenredigheid en evenredig verband, lineair verband, absoluut en relatief, samengestelde grootheid en niet-evenredig verband.

3.1.2 Kennis voor het onderwijzen van verhoudingen

De startbekwame leerkracht beschikt over de wiskundekennis uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast de opbouw van de leerlijnen. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven.

Betekenis en gebruik bij verhoudingen

Op de basisschool rekenen en redeneren leerlingen veelal met getalsmatige en meetkundige verhoudingen in concrete situaties of met benoemde getallen die daarnaar (kunnen) verwijzen. In de onderbouw gaat het daarbij om kwalitatieve verhoudingen die jonge kinderen ervaren. In eerste instantie zijn de leerlingen nog niet getalsmatig bezig, maar maken ze kennis met verhoudingen in bijvoorbeeld conflictsituaties, onderzoeksvragen of verhalen.
In de loop van de basisschool komen steeds vaker verhoudingen aan de orde. De dagelijkse realiteit is bron voor contexten en toepassingssituaties. Bijvoorbeeld: de sterkte van oploslimonade of koffie, fietsversnellingen, benzineverbruik, schaal, snelheid, prijs per eenheid en andere samengestelde grootheden.

Modellen en schema's bij verhoudingen

Ondersteunende modellen en schema's bij verhoudingen zijn: schaallijn, dubbele getallenlijn en verhoudingstabel. Vooral de verhoudingstabel speelt een belangrijke rol bij het rekenen en redeneren met verhoudingen op de basisschool. Deze tabel doet dienst als denkmodel, als zichtbaar blijft waar de getallen voor staan. Als sprake is van verschillende grootheden, kan inzichtelijk worden gemaakt welke bewerkingen in de verhoudingstabel kunnen worden uitgevoerd. In onderstaande verhoudingstabel is het bijvoorbeeld mogelijk beide getallen met hetzelfde te vermenigvuldigen, want dat is een vergroting. Bij beide getallen hetzelfde optellen kan niet, want het gaat om verschillende grootheden.

gewicht	100 gr	200 gr	50 gr	150 gr
Prijs	€ 2,00	€ 4,00	€ 1,00	€ 3,00

Bron: Van Galen e.a., 2005, p. 49.

Interne verhoudingen – verhoudingen binnen dezelfde grootheid – worden niet gevisualiseerd met de verhoudingstabel, maar met de dubbele getallenlijn, waarop immers de onderlinge afstanden zichtbaar zijn (wat niet het geval is bij de verhoudingstabel). Deze stukken lijn zijn bij de verhoudingstabel als het ware weggelaten; alleen de bij elkaar horende getallenkoppels (de externe verhoudingen) worden 'opgeslagen'.

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij verhoudingen

Om kinderen te ondersteunen in hun denken en oplossingsprocessen en hun niveau te verhogen, kan de startbekwame leerkracht flexibel wisselen tussen concreet-betekenisvol, modelondersteund en formeel niveau.

- De leerkracht kent de betekenis van schaal, waaronder verschillen in schaal. Bijvoorbeeld: hoe kleiner de schaal, des te meer details kunnen worden afgebeeld.
- Hij/zij behandelt de relatie en het abstractieverschil tussen de dubbele getallenlijn en de verhoudingstabel.
- In relatie tot en in contrast met verhoudingen worden niet-evenredige verbanden aan de orde gesteld. Bijvoorbeeld dat als de lengte en de breedte van een object twee keer zo groot wordt, de oppervlakte vier keer zo groot wordt.

3.3 Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang verhoudingen

In het dagelijks leven spelen verhoudingen een grote rol. Dat varieert van de dagelijkse boodschappen, waarbij men zich bij verschillende merken en verpakkingen kan afvragen wat naar verhouding het voordeligst is, tot het gebruikmaken van landkaarten en andere afbeeldingen op schaal. Ook bij veel (getalsmatige) informatie gaat het om verhoudingen, zoals hoe vaak een bepaalde beroepsziekte voorkomt of wat het benzineverbruik van een auto is. Verhoudingen helpen om zaken te kunnen vergelijken en dragen ook bij aan het interpreteren van de wereld, zoals in het volgende voorbeeld:

1 op de 6 Nederlandse kleuters is te zwaar.

1 op de 3 kleuters in Afrika en Azië is ondervoed.

Bron: First8.

Verstrengeling van verhoudingen met andere reken-wiskundedomeinen

- De samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven in paragraaf 3.1.
- Bij het rekenen en redeneren met verhoudingen (al dan niet in de verhoudingstabel) wordt gebruikgemaakt van alle basisbewerkingen (zowel met hele getallen als met breuken en kommagetallen).
- Bij samengestelde grootheden (externe verhoudingen), zoals snelheid (km/uur), en overige externe verhoudingen, zoals afstand/tijd, is er verstrengeling met het domein meten.
- Bij het werken met schaal is sprake van sterke samenhang met meten en het metriek stelsel. Daarbij gaat het zowel om inzicht in het metriek stelsel als om het kennen en in elkaar kunnen omrekenen van onderlinge lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten. Hierbij is ook inzicht in niet-evenredige verbanden van belang.
- Binnen de meetkunde is vaak sprake van verhoudingsgewijs redeneren, bijvoorbeeld bij viseren en werken met schaduwen.

Gebruik van verhoudingen bij andere vak- en vormingsgebieden

- Bij het werken met schaal is er een verstrengeling met het vakgebied aardrijkskunde.
- Bij bewegingsonderwijs spelen verhoudingen een rol bij bijvoorbeeld snelheid in relatie tot afgelegde afstand.
- Verder komen verhoudingen aan de orde bij de beeldende vakken. Bij kunst en geschiedenis is aandacht voor de gulden snede.

3.2 Procenten

3.2.1 Kennis van procenten

De startbekwame leerkracht heeft kennis van en inzicht in procenten en de samenhang met verhoudingen, breuken en kommagetallen.

Betekenis van procenten

Percentages zijn gestandaardiseerde verhoudingen, waarbij het totaal op honderd is gesteld. Procenten worden veel toegepast in relatie met geld, bij toe- en afnames, verdelingen en kansen. Dat 100% een geheel aangeeft, betekent niet dat 100% een maximum aanduidt. Het is het totaal waarvan wordt uitgegaan. Grofweg zijn de verschijningsvormen van procenten in twee typen te onderscheiden: die waarbij het gaat om een deel van een totaal en die waarbij het gaat om een toe- of afname.

Redeneren en rekenen met procenten

Met percentages kan op verschillende manieren worden gerekend, bijvoorbeeld:

- rekenen met procenten door procenten om te zetten in breuken en handig te delen (25% uitrekenen door het geheel te delen door 4);
- rekenen met procenten via de zogenoemde 1%-regel;
- rekenen met een percentage als vermenigvuldigfactor (bijvoorbeeld 15% van iets nemen door te vermenigvuldigen met 0,15). Hierbij speelt de zogenoemde procentenasymmetrie een rol.

Overeenkomstig de onderscheiden verschijningsvormen zijn er twee soorten opgaven met procenten: vraagstukken over het deel van een totaal (bijvoorbeeld 15% van 240 = ...) en vraagstukken over een toename of afname (bijvoorbeeld 10% korting op een shirt van € 15. Nieuwe prijs...). Het gaat dus zowel om het berekenen van en rekenen met percentages kleiner dan 100 als met percentages boven de 100.

De startbekwame leerkracht beheerst de varianten van het rekenen met procenten en heeft inzicht in de specifieke wiskundige structuren, zoals:
- de procentenasymmetrie;
- percentages kunnen alleen bij elkaar worden opgeteld als het percentages van hetzelfde geheel zijn en niet van verschillende totalen. Dit laatste komt in media nog wel eens voor, of bij de situatie rente op rente. De startbekwame leerkracht kan dit soort fouten ontmaskeren.

De weerman voorspelde 50 procent kans op regen voor zaterdag en 50 procent kans op regen voor zondag. Voor het hele weekeinde, zo vertelde hij, was de kans op regen dus 100 procent.

Bron: Paulos, 2004.

Wiskundetaal bij procenten
In spreektaal verwijzen uitdrukkingen naar (de betekenis van) procenten, zoals honderd procent inzet, ik voel me niet honderd procent en iets tweehonderd procent zeker weten. De formele rekentaal op de basisschool wordt bij procenten uitgebreid met begrippen als procent, percentage, rente, korting en het symbool %.
Hoewel dit niet (geheel) tot de leerstof van de basisschool wordt gerekend, beheerst de startbekwame leerkracht formele begrippen zoals BTW, inflatie en promille.

3.2.2 Kennis voor het onderwijzen van procenten

De startbekwame leerkracht beschikt over de wiskundekennis uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven.

Betekenis en gebruik bij procenten
Contexten en toepassingssituaties zijn gebaseerd op verschijningsvormen van procenten in de realiteit, zoals korting, deel van een geheel en verdeling. Bij de introductie van procenten kan gebruik worden gemaakt van zulke betekenisverlenende contexten voor het leggen van een begripsbasis. Kinderen kunnen bijvoorbeeld onderzoeken of bepaalde situaties wel of niet kunnen voorkomen en hoe dat dan precies zit, bijvoorbeeld: 15% gratis of 100% korting. Doordat procenten een verschijnsel uit de realiteit zijn, heeft een belangrijk deel van de leerstof op de basisschool de vorm van toepassingsopgaven. Het gaat daarbij bijvoorbeeld om het (formeel) berekenen van rente of korting.

Modellen en schema's bij procenten

Ondersteunende modellen en schema's bij procenten zijn: cirkelmodel, strookmodel en verhoudingstabel. De reikwijdte en het gebruik van modellen lopen uiteen.

- Vooral het cirkelmodel (ook als sectordiagram) en het strookmodel ondersteunen de begripsvorming. Ze zijn beide te relateren aan de verschijningsvorm deel van een totaal.
- Het strookmodel kan worden gerelateerd aan de verschijningsvorm toename en afname.
- Te memoriseren rekenfeitjes kunnen met het cirkelmodel worden gevisualiseerd.
- Op de strook kunnen de absolute gegevens en de relatieve percentages tegelijk worden weergegeven, in relatie tot elkaar. Dit geldt ook voor percentages hoger dan 100.
- Het strookmodel kan worden verbonden met passende betekenisverlenende contexten bij procenten, zoals het balkje op de computer dat geleidelijk gevuld raakt bij het downloaden van een bestand of programma.

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij procenten

Om kinderen te ondersteunen in hun denken en hun niveau te verhogen, kan de startbekwame leerkracht flexibel wisselen tussen verschillende concretiseringen en oplossingswijzen. Bijvoorbeeld: het berekenen van 20% korting door het bepalen van het vijfde deel, de 1%-regel toe te passen, te rekenen via de 10%, te rekenen met een kommagetal (0,20 x 1500) en dit te visualiseren met een strook of door verschillende uitrekenstappen te noteren in de verhoudingstabel. Het is essentieel dat leerkracht en leerlingen deze stappen kunnen verwoorden. De betekenis van percentages blijft centraal staan, onder meer door aandacht te besteden aan verschillende verschijningsvormen, met verschillende betekenis. Bijvoorbeeld: een kans op neerslag van 20% of een verwachte hoeveelheid zon van 20%.
Bij vraagstukken over toe- of afname moet goed worden onderscheiden wat de uitgangssituatie is (ofwel wat als 100% moet worden beschouwd).

3.2.3 Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang procenten

Procenten worden onder andere gebruikt om verdelingen aan te geven en voor korting, BTW, rente, inflatie en hellingspercentages.

Verstrengeling van procenten met andere reken-wiskundedomeinen

- De samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven in paragraaf 3.1.
- Bij het rekenen en redeneren met procenten wordt gebruikgemaakt van alle basisbewerkingen (zowel met hele als met gebroken getallen).
- Doordat procenten in de realiteit worden gebruikt om allerlei informatie in relatie tot andere gegevens weer te geven, is er ook een verstrengeling met het domein informatieverwerking en verbanden. Vooral bij grafieken komen vaak percentages voor.

Gebruik van procenten bij andere vak- en vormingsgebieden

Procenten worden bij gebruikt bij vakken zoals aardrijkskunde, economie, natuur- en scheikunde; in het voortgezet onderwijs meer dan (al) in het primair onderwijs.

3.3 Breuken

3.3.1 Kennis van breuken

De startbekwame leerkracht heeft kennis van en inzicht in breuken en de samenhang met verhoudingen, procenten en kommagetallen.

Betekenis van breuken

Breuken kunnen verschillende betekenissen hebben. Grofweg gaat het daarbij om de weergave van verhoudingen en van resultaten van metingen en verdelingen. In de realiteit komen breuken vooral voor in meet- en verdeelsituaties. Bij rekenen-wiskunde op de basisschool worden zes verschijningsvormen onderscheiden:
een deel van een geheel;
- een deel van een hoeveelheid;
- een meetgetal;
- de uitkomst van een (eerlijke) verdeling;
- een verhouding;
- een rationaal getal (formeel rekengetal).

Sommige van deze verschijningsvormen komen overeen met die van gehele getallen (zoals meetgetal), terwijl andere specifiek bij breuken voorkomen (bijvoorbeeld deel van een geheel).

Gelijkwaardigheid van breuken

Elke breuk heeft een oneindig aantal equivalente breuken. Kernbegrippen in dit verband zijn gelijkwaardigheid, gelijknamigheid en vereenvoudigen.
Bijvoorbeeld: voor elke breuk kunnen gelijkwaardige breuken worden gevonden. De breuken 1/2 en 2/4 zijn gelijkwaardig. Dat houdt in dat ze als rationaal getal even groot zijn en in toepassingssituaties (op concreet niveau) zaken aangeven die evenveel waard zijn, even lang zijn, even zwaar zijn, enzovoort. Dit ligt ten grondslag aan het (verdere) rekenen met breuken.

Redeneren en rekenen met breuken

De breuk 1/3 is het resultaat van 1 : 3 en 2/5 is het resultaat van 2 : 5. Formeel gesteld: 1/3 = 1 : 3 en 2/5 = 2 : 5. Een breuk kan in die zin worden beschouwd als getal en bewerking ineen.

De betekenissen van de basisbewerkingen worden bij breuken uitgebreid.
- De betekenissen kunnen overeenkomen als de breuk fungeert als vermenigvuldiger (4 x 2/3) respectievelijk deler (4 : 2/3). Bijvoorbeeld herhaald optellen bij vermenigvuldigen (4 x 2/3 als 2/3 + 2/3 + 2/3 + 2/3) en opdelen of inpassen bij delen (4 : 2/3 als kijken hoe vaak 2/3 in 4 past).
- De betekenissen worden uitgebreid als de breuk fungeert als vermenigvuldiger (2/3 x 4), bijvoorbeeld een deel nemen van (2/3 x 4 als het 2/3 deel nemen van 4).
- De betekenissen worden beperkt als de breuk fungeert als deeltal (2/3 : 4), waarbij delen op concreet niveau niet kan worden opgevat als opdelen.
- Onderliggende wiskundige structuren van de bewerkingen met breuken komen overeen met die bij hele getallen, bijvoorbeeld de lijnstructuur, groepsstructuur en rechthoekstructuur.

- Afhankelijk van de getallen in (formele) rekenopgaven speelt de eerdergenoemde equivalentie van breuken een rol. Bij optellen en aftrekken van en met breuken kan het voorkomen dat breuken eerst gelijknamig moeten worden gemaakt. Uitkomsten van rekenopgaven kunnen soms worden vereenvoudigd.

De eigenschappen van de basisbewerkingen die kunnen worden gebruikt bij hele getallen (zie paragraaf 2.3), kunnen uiteraard ook worden toegepast bij breuken.

Hoewel dit niet (geheel) tot de leerstof van de basisschool behoort, beheerst de startbekwame leerkracht de formele notatie van repeterende breuken en het formele rekenen met breuken. Deze kennis is nodig met het oog op de doorlopende leerlijn van basisonderwijs naar voortgezet onderwijs.

Wiskundetaal bij breuken

Breuken komen in dagelijkse situaties veel voor in (informeel) taalgebruik: de helft, een kwart, drie kwart, een kwartier, een half uur.
De formele rekentaal op de basisschool wordt bij breuken uitgebreid met specifieke termen als teller, noemer, breukstreep, gelijkwaardig, gelijknamig en vereenvoudigen. Verder worden formele breuknotaties gebruikt met rechte, horizontale of schuine breukstreep.
Hoewel dit niet (geheel) tot de leerstof van de basisschool wordt gerekend, beheerst de startbekwame leerkracht formele begrippen zoals rationaal getal, decimaal getal en decimale breuk, gemengd getal (bijvoorbeeld 2 1/4), echte breuk (bijvoorbeeld 2/3 of 1/4) en stambreuk (bijvoorbeeld 1/3 of 1/4), GGD (grootste gemene deler) en KGV (kleinste gemene veelvoud).

3.3.2 Kennis voor het onderwijzen van breuken

De startbekwame leerkracht beschikt over de wiskundekennis uit de voorgaande paragraaf en beheerst de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven.

Betekenis en gebruik bij breuken

Contexten en toepassingssituaties zijn gebaseerd op de verschijningsvormen van breuken in de realiteit en het (laten) ontstaan van breuken als resultaat van meet- en verdeelsituaties. Bijvoorbeeld: het eerlijk delen van een pizza waardoor de breuk als deel van een geheel ontstaat. Op concreet (handelend) niveau gaat het ook om het herkennen, benoemen, vouwen, tekenen en aflezen van breuken, bijvoorbeeld het maken van vierden door een strook in vieren te vouwen of het aflezen van een kwart liter op een maatbeker.

Modellen en schema's bij breuken

Ondersteunende modellen en schema's bij breuken zijn: cirkel, rechthoek (plak), (dubbele) getallenlijn, strook en verhoudingstabel. De reikwijdte en de bruikbaarheid van modellen verschillen en lopen uiteen van denkmodel tot rekenhulp.

De getallenlijn vervult een cruciale rol bij het ordenen, vergelijken en positioneren van breuken. Ook wordt de getallenlijn gebruikt bij het (leren) bepalen van gelijkwaardige breuken. Verder kunnen alle basisbewerkingen met breuken op de getallenlijn worden gevisualiseerd.

- Modellen werken ondersteunend om kinderen te laten komen tot breukbegrip. Bijvoorbeeld: op een strook die een hoeveelheid representeert, kunnen het relatieve deel (de breuk), het absolute deel en het totaal (de hoeveelheid en het deel van die hoeveelheid) worden aangegeven.
- Ook modellen onderling zijn in sommige gevallen gerelateerd, zoals de dubbele getallenlijn en de strook. Beide kunnen bijvoorbeeld worden gebruikt om breuken, in de betekenis van deel van een hoeveelheid, te relateren aan de hoeveelheid waarop zij betrekking hebben. De modellen verschillen ook in reikwijdte. De strook staat bijvoorbeeld duidelijk voor een bepaald geheel of totaal en op de dubbele getallenlijn kunnen breuken groter dan 1 worden gevisualiseerd.

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij breuken

Om kinderen te ondersteunen in hun denken en hun niveau te verhogen, kan de startbekwame leerkracht flexibel wisselen tussen concreet-betekenisvol, modelondersteund en formeel niveau.

Bijvoorbeeld: hij/zij leert de leerlingen de vermenigvuldiging 2 x 3 1/4 oplossen:
- als herhaalde optelling, visueel ondersteund met het cirkel- of strokenmodel;
- als herhaalde optelling, gevisualiseerd met sprongen op de getallenlijn;
- met de rechthoekstructuur, gevisualiseerd met het rechthoekmodel;
- op formeel niveau, door de vermenigvuldiging te verdelen in 2 x 3 en 2 x 1/4.

Bij het redeneren en rekenen met breuken op de basisschool gaat het in eerste instantie om het ordenen en vergelijken van breuken, en het positioneren van breuken op de getallenlijn. Voor veel kinderen is het hierbij lastig dat de volgorde schijnbaar omgekeerd is aan hun voorkennis van hele getallen: 1/4 is groter dan 1/8 (terwijl 4 kleiner is dan 8) en op de getallenlijn staat 1/8 links van 1/4 (terwijl 8 rechts staat van 4). Ook de verwoording is een punt van aandacht: een vierde en vier, en een achtste en acht, klinken enigszins hetzelfde en worden door kinderen nog wel eens door elkaar gehaald.

- Voor het bepalen van gelijkwaardige breuken kunnen diverse strategieën en modellen worden gebruikt, zoals aflezen, afpassen of beredeneren van een relatie, waartussen duidelijke verschillen in redenatie en abstractie zitten.
- Bij formele opgaven met breuken zijn passende ondersteunende modellen en betekenisverlenende contexten te bepalen, ook als de opgaven niet tot de reguliere leerstof voor alle leerlingen horen. Bijvoorbeeld: een breuk delen door een breuk kan worden geconcretiseerd door te kijken hoeveel glazen van 1/8 liter uit een wijnfles van 3/4 liter kunnen worden geschonken.
  Omgekeerd kan de leerkracht bij opgaven die zijn weergegeven in een context, een passend model kiezen dat kinderen helpt de bijbehorende formele opgave te bepalen.
- Bewerkingen met breuken kunnen worden uitgevoerd met ondermaten en bemiddelende grootheden.
- Dat een echte breuk kleiner is dan 1, heeft invloed op hoe de bewerkingen vermenigvuldigen en delen kunnen uitpakken. Als je een getal vermenigvuldigt met een echte breuk, is het product kleiner dan de vermenigvuldiger, en bij een deling door een breuk is het quotiënt

juist groter dan de deler. Anders gezegd: een vermenigvuldiging met een breuk pakt uit als een deling en een deling door een breuk pakt uit als een vermenigvuldiging. Bijvoorbeeld: 1/3 x 4 is hetzelfde als 4 : 3. En de deling 2 : 1/5 geeft dezelfde uitkomst als 2 x 5. Voor veel leerlingen is dit een moeilijk punt. Een misconceptie als 'vermenigvuldigen maakt altijd groter' moet door de kinderen worden onderzocht.

De startbekwame leerkracht kan de leerstof visualiseren en inzichtelijk onder woorden brengen, gebruikmakend van de betekenis van breuken en bewerkingen. Bijvoorbeeld: een breuk vermenigvuldigen met een breuk wordt gevisualiseerd op de getallenlijn of met het rechthoekmodel, waarbij 1/3 x 1/4 wordt verwoord als het 1/3 deel nemen van 1/4.

3.3.3 Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang breuken

In het alledaagse gebruik worden voornamelijk eenvoudige breuken toegepast. Bijvoorbeeld: de helft, een derde en een kwart. In andere gevallen komen vormen zoals procenten voor.

Verstrengeling van breuken met andere reken-wiskundedomeinen

- De samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven in paragraaf 3.1.
- Bij het bepalen van gelijkwaardige en gelijknamige breuken wordt gebruikgemaakt van de basisbewerkingen (met hele getallen), vooral de tafels van vermenigvuldiging.
- Bij het vereenvoudigen van breuken is het kunnen delen van belang. Een breuk is getal en bewerking ineen. Bijvoorbeeld: 1/5 komt overeen met 1 : 5.
- Verder is er verstrengeling met meten; breuken komen voor als meetgetal. Meten met bijvoorbeeld stroken en delen van stroken wordt gebruikt binnen het domein breuken.

Gebruik van breuken bij andere vak- en vormingsgebieden

Bij muziek worden breuken onder andere gebruikt bij het notenschrift (halve noten, kwartnoten, enzovoort).

3.4 Kommagetallen

3.4.1 Kennis van kommagetallen

De startbekwame leerkracht heeft kennis van en inzicht in kommagetallen, waaronder de samenhang met verhoudingen, procenten en breuken.

Betekenis van kommagetallen

Kommagetallen komen voor als meet- en als rationaal getal (formeel rekengetal). Andere verschijningsvormen van breuken worden gewoonlijk niet als kommagetal genoteerd. Een belangrijk verschil met breuken is dat kommagetallen door de decimale structuur een continu karakter hebben, waar breuken een discreet karakter hebben. Anders gezegd: met kommagetallen is een steeds verdere systematische verfijning met een factor tien mogelijk. Door de decimale structuur van kommagetallen kan aan elk cijfer, evenals bij hele getallen, een positiewaarde worden toegekend.

Gelijkwaardigheid van kommagetallen

Elk kommagetal heeft een oneindig aantal equivalenten: 2,4 = 2,40 = 2,400, enzovoort. Dit geldt echter alleen bij formele (reken)getallen. Bij (concrete) meetgetallen geeft het aantal decimalen de meetnauwkeurigheid aan. Bijvoorbeeld: 2,4 meter is een lengte gemeten tot op de decimeter nauwkeurig (dus liggend op het interval tussen 2,35 en 2,45 meter), maar 2,40 meter is een lengte gemeten tot op de centimeter nauwkeurig (dus liggend op het interval tussen 2,395 en 2,405 meter). Daarom geldt 2,4 meter ≠ 2,40 meter.

Redeneren en rekenen met kommagetallen

De betekenis van de basisbewerkingen met kommagetallen komt overeen met de betekenis van de basisbewerkingen met breuken.
De basisbewerkingen kunnen met kommagetallen op dezelfde wijze als met hele getallen worden uitgevoerd. Daarbij gelden uiteraard ook de eigenschappen van de basisbewerkingen die kunnen worden gebruikt bij hele getallen (zie paragraaf 2.3). Evenals bij hele getallen moet rekening worden gehouden met de positiewaarden van de afzonderlijke cijfers in een getal. Afhankelijk van de getallen in (formele) rekenopgaven kan de hierboven genoemde gelijkwaardigheid bij formele kommagetallen een rol spelen. Bijvoorbeeld: 2,3 + 4,52 kan worden opgelost door 2,30 + 4,52 uit te rekenen.

Met kommagetallen kan, net als bij hele getallen, met het hoofd of cijferend worden gerekend. Bij cijferend rekenen kan gedurende het oplossingsproces de komma worden weggelaten of weggedacht. Bij schattend rekenen kan de komma vervolgens correct in het verkregen antwoord worden geplaatst.

Bij schattend rekenen worden kommagetallen afgerond op hele getallen. Afronden kan ook op positiewaarden achter de komma, bijvoorbeeld op tienden.

De belangrijkste wiskundige structuur bij de basisbewerkingen met kommagetallen is de decimale positionele structuur. Verder komen de onderliggende structuren van de basisbewerkingen overeen met die bij hele getallen, bijvoorbeeld de lijnstructuur, groepsstructuur en rechthoekstructuur.

Wiskundetaal bij kommagetallen

Afgezien van het optreden van de komma wordt de formele wiskundetaal niet uitgebreid met kommagetallen.
Bij 2,3 miljoen (twee komma drie miljoen) markeert de komma net als bij kommagetallen de eenheid (in dit geval een miljoen).
Voor (het begrip van) de notatie is het van belang dat niet de komma, maar de eenheid de plek markeert waaromheen de positiewaarden tientallen en tienden, honderdtallen en honderdsten (enzovoort) symmetrisch zijn geplaatst.

3.4.2 Kennis voor het onderwijzen van kommagetallen

De startbekwame leerkracht beschikt over de wiskundekennis uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals relevante betekenisverlenende contexten en toepassingssituaties, modellen en schema's. Deze kennis past hij/zij toe om adaptief en diagnosticerend reken-wiskundeonderwijs te kunnen geven.

Betekenis en gebruik bij kommagetallen

Contexten en toepassingssituaties bij kommagetallen zijn gebaseerd op verschijningsvormen van kommagetallen in de realiteit, dus op meetsituaties. Grootheden die worden gebruikt, zijn: geld, lengte en afstand, inhoud, gewicht en temperatuur.
Een kernmoeilijkheid voor kinderen op de basisschool is dat de notatie van kommagetallen gelijk is aan die van hele getallen, terwijl de betekenis overeenkomt met die van breuken. Met behulp van meetgetallen kunnen kinderen betekenis geven aan kommagetallen. Kommagetallen opvatten als benoemde meetgetallen helpt om tegemoet te komen aan specifieke moeilijkheden, zoals het inschatten van de grootte van getallen. Ook biedt het ondersteuning bij het ordenen en vergelijken van kommagetallen met een verschillend aantal cijfers achter de komma. Hoewel meetkundig gezien bij meetgetallen niet mag worden gesteld dat (bijvoorbeeld) 8,9 meter even lang is als 8,90 meter (vanwege de meetnauwkeurigheid die wordt aangegeven door het aantal decimalen), gebeurt dit in de didactiek van kommagetallen wel. Kinderen kunnen zo doorzien wat op formeel niveau het onderscheid is tussen bijvoorbeeld 8,9, 8,90 en 8,09 en waar op de getallenlijn bijvoorbeeld 8,10 en 8,9 ten opzichte van elkaar liggen.
De beperkte verfijning achter de komma bij geld kan bij kinderen leiden tot misconcepties zoals het opvatten van de cijfers achter de komma als losse getallen.

Modellen en schema's bij kommagetallen

Ondersteunende modellen bij kommagetallen zijn het benoemd noteren van kommagetallen en de getallenlijn. Daarnaast zijn er nog enkele modellen en schema's die in mindere mate of bij specifieke situaties worden gebruikt.

- Bijvoorbeeld: door het toevoegen van 'm' aan de getallen in een opgave zoals 2,3 – 1,50, kan worden gedacht aan meters en aan decimeters en centimeters als ondermaten. Hierdoor wordt de moeilijkheid van een wisselend aantal cijfers achter de komma ondervangen.
- De getallenlijn vervult, evenals bij breuken, een essentiële rol bij het ordenen, vergelijken en positioneren. Ook hierbij kan gebruik worden gemaakt van ondermaten om kommagetallen met specifieke moeilijkheden zoals nullen of een wisselend aantal cijfers achter de

komma te positioneren. Verder wordt de getallenlijn gebruikt om de decimale verfijning te visualiseren, bijvoorbeeld door een stuk van de getallenlijn uit te vergroten en verder onder te verdelen.

- In mindere mate wordt het positieschema uitgebreid voor kommagetallen. In het positieschema worden de cijfers in een kommagetal geordend naar hun positiewaarde. Dit kan als benoemd meetgetal (met bijvoorbeeld hm, dam en m voor de komma en dm, cm en mm na de komma), maar ook als formeel rekengetal (met H, T en E voor de komma en t, h en d na de komma).

Oplossingsprocessen en niveauverhoging bij kommagetallen

Om kinderen te ondersteunen in hun denken en hun niveau te verhogen, kan de startbekwame leerkracht flexibel wisselen tussen concreet-betekenisvol, modelondersteund en formeel niveau.

- Bij het rekenen en redeneren met kommagetallen is het globaal schattend rekenen van belang vanwege het inschatten van de grootte van de kommagetallen en de uitkomst van de bewerkingen. Daarvoor worden ook opgaven gebruikt waarbij de cijfers van het getal van het antwoord zijn gegeven, maar de komma op de correcte plek moet worden geplaatst. Dit schattend rekenen gaat vooraf aan het precies rekenen met kommagetallen.
- Het gegeven dat een nul achter een kommagetal mag worden geplaatst of weggelaten, kan kinderen in verwarring brengen, want dit is in tegenspraak met hun voorkennis. Bovendien mag de nul bijvoorbeeld 3,50 wel worden weggelaten, maar die van 3,05 weer niet. Door te refereren aan meetgetallen en ondermaten wordt dit soort moeilijkheden ondervangen (hoewel bij meetgetallen niet zomaar een nul achteraan kan worden toegevoegd of weggelaten, omdat dat een andere meetnauwkeurigheid suggereert).
- De notatie van kommagetallen lijkt op die van hele getallen. Hierdoor vatten kinderen de cijfers achter de komma in eerste instantie vaak op als hele getallen, waardoor fouten ontstaan zoals 3,15 + 0,4 = 3,19. In dit verband is van belang dat de leerlingen leren dat 3,15 niet moet worden uitgesproken als 'drie komma vijftien', maar (in eerste instantie) als 'drie komma één vijf' en (verderop in het leerproces) als 'drie en één tiende en vijf honderdsten'.
- Door de analogie met hele getallen is rekenen met kommagetallen, in vergelijking met rekenen met breuken, niet zo moeilijk, mits de decimale structuur wordt doorzien. Dit geldt zowel voor hoofdrekenen als cijferen met kommagetallen. Op concreet-modelondersteund niveau kan de leerkracht refereren aan meetgetallen en ondermaten. Ondersteuning op meer formeel niveau gebeurt door te verwijzen naar breuken (tienden, honderdsten, enzovoort) of door komma's tijdens de berekening weg te denken en daarna met behulp van een beredeneerde schatting op de juiste plek te plaatsen.

3.4.3 Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang kommagetallen

Kommagetallen komen in de realiteit veelvuldig voor als meetgetallen. In berichtgeving, bijvoorbeeld over sportprestaties, maar ook in voor het dagelijks functioneren relevante zaken, zoals (lengte)meting, inhoudsmaten bij recepten, gewicht van bepaalde producten bij het boodschappen doen, benzine tanken, bepaalde verkeersborden, geld en de meting van de vaste lasten van gas, water en elektra.

Verstrengeling van kommagetallen met andere reken-wiskundedomeinen

- De samenhang van verhoudingen, procenten, breuken en kommagetallen staat beschreven in paragraaf 3.1.
- Er is verstrengeling met hele getallen, zowel in de decimale structuur van ons getalsysteem als bij de bewerkingen, waaronder schattend rekenen en afronden.
- Er is een sterke verstrengeling met het domein meten. Dit wordt benut in de didactische aanpak.

Gebruik van kommagetallen bij andere vak- en vormingsgebieden

Kommagetallen worden als meetgetallen toegepast bij vakken als aardrijkskunde, biologie en techniek, beeldende vorming en bewegingsonderwijs.

4. Meten

4.1 Kennis van meten

Bij het meten gaat het zowel om toepasbaarheid als om de onderliggende wiskundige structuur. Het metriek stelsel sluit nauw aan bij het tientallig getal-systeem. De startbekwame leerkracht doorziet deze systematiek en kan deze verklaren, ook vanuit historisch perspectief.

Meethandelingen

Bij het meten gaat het in alle gevallen om het afpassen van een standaardmaat of een natuurlijke maat.

> Bijvoorbeeld: het bepalen van de snelheid van een auto is het resultaat van afpassen. De snelheidsmeter gaat feitelijk voortdurend na hoe vaak een standaardafstand (kilometer) kan worden afgepast in een tijdseenheid (uur), op grond van een (kleinere) afgelegde afstand gedurende een (kortere) tijdsspanne.

In het dagelijks leven worden regelmatig meetinstrumenten gebruikt. Leerkrachten basisonderwijs kennen de werking van deze instrumenten en kunnen ze gebruiken Zij zijn bijvoorbeeld in staat om met een stopwatch en meetlint de gemiddelde snelheid van een hardloper te bepalen.

Het metriek stelsel

Relaties binnen het metriek stelsel zijn gebaseerd op betekenissen van voorvoegsels en op de maat waarmee gemeten wordt. Deze voorvoegsels maken het ook mogelijk nieuwe, minder gangbare maten te construeren. Ook de omtrek-, oppervlakte- en inhoudsformules horen tot relaties binnen het metriek stelsel. De onderliggende structuur van zulke formules is die van handig en verkort tellen.

De opbouw van het metriek stelsel sluit nauw aan bij die van het tientallig getalsysteem. Zo verschillen lengtematen (met bovenstaande voorvoegsels) onderling met een factor tien. Bij oppervlaktematen is dat een factor honderd en bij kubieke inhoudsmaten een factor duizend. Bij gewone inhoudsmaten is het weer een factor tien.
Een voorbeeld van een specifieke relatie: een liter is gelijk aan een kubieke decimeter. Tussen inhoud en gewicht is geen vaste relatie. Zo weegt een kubieke decimeter water (bij een temperatuur van 4 graden Celsius) precies een kilo, terwijl een liter melk net iets zwaarder is dan een kilo.
Van leerkrachten wordt verwacht dat ze de systematiek in het metriek stelsel kennen en kunnen gebruiken.

Meet(on)nauwkeurigheid

Bij het meten gaat het om meet(on)nauwkeurigheid, het vaststellen van het interval waarbinnen meetresultaten mogen vallen, maatverfijning en afronden. De meetonnauwkeurigheden hangen af van de meetsituatie en van de gebruikte maat.

> Bijvoorbeeld: wanneer een kamer wordt gemeten in meters, ontstaat mogelijk een behoorlijke meetfout. Wanneer in centimeters wordt gemeten, zal het meetresultaat waarschijnlijk voldoende nauwkeurig zijn.

Grootheden en maten

De leerkracht beheerst de grootheden gewicht, lengte, oppervlakte en inhoud, en de bijbehorende metrische maten. Hij/zij kent ook de grootheden temperatuur, geld en tijd, en de daarbij behorende maten. Verder is hij/zij op de hoogte van samengestelde grootheden die zijn gebaseerd op de genoemde grootheden, zoals snelheid. Samengestelde maten worden geconstrueerd om te normeren of te standaardiseren, om situaties te vergelijken, bijvoorbeeld kilometer per uur, liter per minuut (de waterdruk op een kraan), kilometer per liter (verbruik van een voertuig) of liter per vierkante meter (op een verfblik).
Grootheden die niet binnen het metrieke stelsel passen, zijn tijd, geld en temperatuur.

Wiskundetaal bij meten

Bij meettaal gaat het om:

- woorden die worden gebruikt om grootheden te vergelijken, zoals langer, korter, groter en meer;
- woorden die refereren aan natuurlijke maten, zoals stap, handspan en duim;
- voorvoegsels die worden gebruikt om standaardmaten binnen het metrieke stelsel te vormen;
- aanduidingen voor kwadratische en kubische relaties, bijvoorbeeld vierkante meter of m^2 en kubieke centimeter of cm✥. De aanduiding komt niet letterlijk overeen met de realiteit; een vierkante meter hoeft niet vierkant te zijn en een kubieke centimeter niet kubusvormig.

Hoewel dit niet (geheel) tot de leerstof van de basisschool hoort, kent de startbekwame leerkracht de verschillende betekenissen van ‘ton’ bij gewicht, geld en inhoud. Hij/zij kan de oppervlakte van een cirkel bepalen en weet dat temperatuur ook kan worden gemeten in de maat Kelvin. Deze kennis is nodig met het oog op de doorlopende leerlijn van het basisonderwijs naar het voortgezet onderwijs.

4.2 Kennis voor het onderwijzen van meten

De startbekwame leerkracht beschikt over de wiskundekennis uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast de opbouw van de betreffende leerlijnen. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert.

Kinderen leren meten en werken met meetgetallen, maten en grootheden door regelmatig in meetsituaties te worden geplaatst. Door meetactiviteiten uit te voeren maken zij kennis met verschillende grootheden, zoals lengte, oppervlakte, inhoud, gewicht, tijd en geld. Ook ontwikkelen ze een concept voor het meten, zoals het herhaald afpassen van een eenheid van een zekere maat. Op de basisschool verloopt het leren meten globaal van ordenen en vergelijken zonder gebruik van maten in de onderbouw, via de toepassing van natuurlijke maten, naar het hanteren van de standaardmaten van het metriek stelsel in de bovenbouw. Vanwege het bijzondere karakter van de grootheden tijd en geld wijkt de opbouw hier iets af. Bij tijd komt eerst het verwerven van het besef van tijd aan de orde. Daarna wordt bij het leren klokkijken de systematiek rond tijd behandeld. Werken met geld valt vanaf een gegeven moment samen met het leren rekenen met kommagetallen.

Ordenen en vergelijken bij meten

Zonder maten te gebruiken kunnen (jonge) kinderen al uitspraken doen over wat langer / korter / even lang, groter / kleiner / even groot, meer / minder of evenveel is.

De meetstrategieën ordenen en vergelijken staan centraal in de onderbouw van de basisschool. Kinderen leren objecten van een bepaalde grootheid te vergelijken en te ordenen, bijvoorbeeld op lengte, oppervlakte, gewicht of inhoud.

Meten met een natuurlijke maat

Natuurlijke maten in meetsituaties uit de omgeving en het dagelijks leven van kinderen worden uitgebuit. Bijvoorbeeld: groter en zwaarder worden, schoenmaten, dagritme, sport en leeftijd. Het meten met natuurlijke maten gaat over op het gebruiken van standaardmaten wanneer:

- kinderen kennismaken met standaardmaten in meetsituaties, bijvoorbeeld omdat ze thuis iemand met een liniaal of meetlat hebben zien werken en daardoor de centimeter kennen als eenheid;
- communicatie over maten om standaardisering vraagt, bijvoorbeeld als bij het meten van lengte met een natuurlijke maat (stappen) meetverschillen ontstaan.

Standaardmaten en referenties

Om informatie over groottes of afstanden en berichten in de media te kunnen interpreteren, is het vaak nodig die te koppelen aan eigen (meet)referenties en referentiematen.

> Meetreferenties zijn bijvoorbeeld: een grote stap (van een kind) is iets minder lang dan een meter en in een uur loop je ongeveer vijf kilometer. Referentiematen zijn bijvoorbeeld: een bordliniaal is een meter en een pak suiker weegt een kilo.

Leerkrachten kennen de referenties waarover kinderen beschikken en gebruiken die om betekenis te geven aan standaardmaten en informatie uit de media.
Kinderen leren standaardmaten kennen. Het gaat daarbij aanvankelijk om het ervaren van alledaagse maten, zoals meter, centimeter, uur en minuut. Gaandeweg ontdekken kinderen meer (standaard)maten en referentiematen.

Voorvoegsels en relaties tussen maten

Bij het leren van relaties tussen maten wordt in de bovenbouw geleidelijk de aandacht gevestigd op gebruikte voorvoegsels en de betekenis hiervan. Zo komen kinderen ook in aanraking met minder bekende maten en leren zij bijvoorbeeld dat een decameter hetzelfde is als tien meter, omdat 'deca' staat voor 'tien'. Speciale aandacht krijgt het klokkijken.

Metriek stelsel en begrip

Door het verkennen van relaties tussen maten raken leerlingen thuis in de systematiek van het metriek stelsel. Het zelf uitvoeren van meetactiviteiten draagt bij aan het herkennen van de analogie met de systematiek van het positionele tientallige getallenstelsel. Ook het samenstellen van een poster van het metriek stelsel kan de bewustwording en het inzicht vergroten. Speciale aandacht krijgen de relaties en de verschillen tussen lengte-, oppervlakte- en inhoudsmaten, en de (niet-)relaties tussen inhoud en gewicht.

4.3 Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang meten

Vrijwel alle getallen waarmee we in de realiteit te maken hebben, zijn meetgetallen. Daaraan ontleent het meten zijn betekenis. Dit komt bijvoorbeeld naar voren als we op de verpakking van het hieronder afgebeelde pak rijst kijken. De meetgetallen geven gewicht, tijd, datum, inhoud, vermogen en voedingswaarde aan. Van de gebruiker wordt verwacht dat hij de getallen vertaalt naar de eigen situatie.

Meten doen we dagelijks, al is het vaak onbewust. We verrichten meetactiviteiten bij het omgaan met een weegschaal met geheugen, de instellingen van vrieskist, oven en magnetron, het zetten van koffie, het instellen van een tijdschakelaar of de DVD-recorder, en het maken van een back-up van de computer. Verder zijn we met geld en met tijd doorlopend bezig met meetgetallen en de onderlinge relaties daartussen. Meetgetallen vindt men daarnaast veel in de media. Bijvoorbeeld bij berichten over financiën, over (voorgestelde veranderingen in de) infrastructuur, bij beschrijvingen en grafische weergaven van ontwikkelingen in de tijd en bij verslaggeving van sportevenementen.

Verstrengeling van meten met andere reken-wiskundedomeinen

- Meetcontexten waarin sprake is van lengtemeting, helpen kinderen bij het betekenis geven aan de getallenlijn als model. Daardoor ondersteunt het meten het rekenen tot 100 en 1.000. Omgekeerd helpt kennis van het rekenen tot 100 en 1.000 bij het rekenen met meetgetallen.
- Meten geeft betekenis aan kommagetallen en omgekeerd. Dit geldt met name voor het rekenen met geld. Door de beperkte verfijning 'achter de komma' kan dit echter bij leerlingen ook tot misconcepties leiden.
- Een van de verschijningsvormen van breuken is die van meetgetal.
- Bij het rekenen met verhoudingen spelen veelal meetgetallen een rol. Verhoudingsgetallen worden vaak gestandaardiseerd tot samengestelde maten. Vooral bij het werken met schaal is er een samenhang met het metrieke stelsel.
- Benaderen en schattend rekenen: meetgetallen kennen altijd een bepaalde mate van nauwkeurigheid. Daarom kan het rekenen met meetgetallen worden beschouwd als het rekenen met afgeronde getallen, ofwel als schattend rekenen.
- Er is nauwe samenhang tussen de domeinen meten en meetkunde. Bij meten worden andere mentale handelingen verricht dan bij de meetkunde. Waar het bij meten gaat om het werken en toekennen van maten of maatgetallen, ligt bij meetkunde het accent op ruimtelijke relaties en het beredeneren hiervan.

Gebruik van meten bij andere vak- en vormingsgebieden

- Meten wordt toegepast bij vakken zoals natuuronderwijs, aardrijkskunde, geschiedenis en techniek. Deze vakken vormen ook een context voor het leren meten. Bij aardrijkskunde gaat het bijvoorbeeld om redeneren en rekenen met schaal en het interpreteren van plattegronden. Deze raakpunten zijn er ook met geschiedenis, waar tijd centraal staat en een tijdlijn wordt gebruikt waarvan de eigenschappen overeenkomsten vertoont met die van de getallenlijn.
- Geschiedenis laat ook het belang zien van standaardisering van maten en meetsystemen voor bijvoorbeeld natievorming.
- In het voortgezet onderwijs wordt meten ook toegepast bij vakgebieden zoals scheikunde en economie.
- Bij beeldende vakken wordt meten regelmatig gebruikt bij bijvoorbeeld het construeren van een beeldend object.

5. Meetkunde

5.1 Kennis van meetkunde

De startbekwame leerkracht kent de meetkundige kennisgebieden en activiteiten.
Bij meetkunde gaat het onder meer over de plaats van objecten in de ruimte, de richting van kijken en bewegen, routes, netwerken (telefoonnet, wegennet, waterleiding), vertakte vormen, de plaats van objecten ten opzichte van elkaar, zoals 'tegenover elkaar' en (spiegel) symmetrie, vlakke en ruimtelijke figuren, patronen, vormen zoals lijn(stuk), cirkel, vierkant, rechthoek of driehoek, de eigenschappen van vormen, hoe vormen zijn samengesteld uit andere vormen, het afbeelden (projecties) van ruimtelijke vormen in het platte vlak, en het vergroten en verkleinen van vormen en afbeeldingen (zoals even groot, of niet even groot maar dezelfde vorm). De kennisgebieden van meetkunde op de basisschool zijn in te delen naar ervaren, verklaren en verbinden.

Ervaren bij meetkunde

Ervaren betekent dat meetkunde begint bij het zien en handelen, zoals bijvoorbeeld door:

- het tekenen van vierhoeken en driehoeken volgens een constructievoorschrift, met behulp van liniaal, gradenboog en passer. Bijvoorbeeld: teken een ruit met de diagonalen van 5 cm en 4 cm;
- het toepassen van transformaties. Bijvoorbeeld: draaien en verschuiven, met voorwerpen en van tekeningen.

Verklaren bij meetkunde

Verklaren houdt bij meetkunde in: duidelijk maken, interpreteren, toelichten, uitleggen, duiden en verhelderen. Hierbij speelt beschrijven en (be)redeneren een belangrijke rol. Dit kan met taal, getallen, ruimtelijke figuren en situaties, zoals bijvoorbeeld door:

- beschrijven van richting of hoek en afstand in het platte vlak. Bijvoorbeeld: naar links of tussendoor;
- beschrijven en gebruiken van verschillende standpunten. Bijvoorbeeld: zijaanzicht en bovenaanzicht.

Verbinden bij meetkunde

Verbinden houdt bij meetkunde in: het aaneenschakelen, het aansluiten, het combineren, het samenbundelen en het in verband brengen met elkaar. Dit betekent dat meetkundige ervaringen en verklaringen in verband worden gebracht met andere (meetkundige) begrippen en verschijnselen, zoals bijvoorbeeld door:

- het herkennen, benoemen en onderzoeken van gelijkvormige en niet-gelijkvormige figuren aan de hand van de eigenschappen. Bijvoorbeeld: formules voor omtrek, oppervlakte en inhoud van veel voorkomende meetkundige figuren, de stelling van Pythagoras en symmetrie;
- aan de hand van meetkundige beschrijvingen conclusies trekken over objecten en hun plaats in de ruimte. Bijvoorbeeld: het bepalen van de verplaatsing van de lichtbron als een fles op tafel staat en de schaduw 15 centimeter langer wordt.

Wiskundetaal bij meetkunde

Bij meetkunde worden de ruimte en de omgeving beschreven met:

- benamingen van figuren en objecten: driehoek, vierkant, rechthoek, ruit, parallellogram, cirkel, kubus, balk, prisma, piramide, cilinder, kegel en bol;
- benamingen en omschrijvingen van eigenschappen van figuren: symmetrie, evenwijdig, loodrecht, hoek en zijden;

- meetkundige begrippen zoals voorzetsels (voor en naast), de benamingen van soorten lijnen en lijnstukken (snijdende lijn, middellijn en diagonaal) en hoeken (rechte hoek en hoekbenen);
- eigenschappen/kenmerken en vlakbenamingen van de verschillende veelhoeken en veelvlakken.

Het meetkundig handelen wordt beschreven door:
- de benamingen van de verschillende transformaties. Bijvoorbeeld: rotatie en spiegelen;
- de bijbehorende operaties. Bijvoorbeeld: cirkelboog tekenen en plaats beeldpunt bepalen;
- het gebruik van oriëntatiebegrippen. Bijvoorbeeld: herkenningspunten en gelijkvormigheid;
- het gebruik van materiaalbegrippen. Bijvoorbeeld: bouwplaat en uitslag.

5.2 Kennis voor het onderwijzen van meetkunde

De startbekwame leerkracht beschikt over de meetkundekennis uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast de opbouw van de deelgebieden van meetkunde. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert.

Kinderen ontdekken hoe zij hun ruimtelijk voorstellingsvermogen kunnen gebruiken. Ze leren zich een voorstelling van een ruimtelijke situatie te maken, na te denken over hoe dingen in elkaar zitten, over wat ze gaan maken en hoe dit kan. Moderne technologie biedt nieuwe ervaringen, bijvoorbeeld Google Earth of computerspellen zoals Wii-sports.

Meetkunde is op de basisschool onderverdeeld in vijf deelgebieden:
1. oriëntatie in de ruimte;
2. viseren en projecteren;
3. transformeren;
4. construeren;
5. visualiseren en representeren.

Bij elk van deze vijf deelgebieden worden activiteiten gerealiseerd op de drie kennisgebieden ervaren, verklaren en verbinden. Tussen de onderscheiden deelgebieden is steeds nauwe samenhang en overlap, evenals met het domein meten.

Oriëntatie in de ruimte

Oriëntatie in de ruimte heeft vooral te maken met bewegen, kijken en beschrijven. Onder oriënteren wordt verstaan dat kinderen met elementaire ruimtelijke oriëntatiebegrippen (richting, hoek, evenwijdigheid, coördinaten) hun eigen positie en die van andere objecten in de ruimte kunnen bepalen. Een leerkracht moet daarbij gebruik kunnen maken van allerlei beschrijvingsmiddelen van de ruimte, zoals kaarten, plattegronden, schema's, foto's en aanzichten.

In de onderbouw gaat het bij oriëntatie in de ruimte onder meer om:
- het lokaliseren van objecten in de bekende omgeving met ruimtelijke begrippen, zoals voor, achter, dichtbij, naast, links en rechts. Bijvoorbeeld in een spelvorm: de ene leerling vertelt hoe zijn blokkenbouwsel eruitziet en de andere leerling bouwt het op basis van die beschrijving, zonder te kijken, na.

In de bovenbouw gaat het bij oriëntatie in de ruimte onder andere om:
- het lokaliseren van plaatsen (in brede zin, dus ook rivieren, bergen) en routes op plattegronden en kaarten. Bijvoorbeeld in de atlas met behulp van coördinaten ('kijk in vak B5').

Viseren en projecteren
Met viseren en projecteren wordt bedoeld dat we met rechte lijnen meetkundige verschijnselen uit de realiteit kunnen verklaren. Daarbij valt te denken aan schaduwverschijnselen, maar ook aan (on)zichtbaarheid van objecten vanuit bepaalde standpunten.

In de onderbouw gaat het bij viseren en projecteren bijvoorbeeld om:
- het opdoen van ervaringen met licht en schaduw door op het speelplein uit te zoeken hoe groot je schaduw is en hoe je die kan veranderen of doen verdwijnen.

In de bovenbouw gaat het bij viseren en projecteren bijvoorbeeld om:
- het voorspellen en uitproberen wat vanaf een bepaald standpunt zichtbaar is en wat niet. Hierbij wordt gebruikgemaakt van echte of getekende viseerlijnen en wordt geredeneerd met termen zoals lijn, richting en hoek.

Transformeren
Onder transformeren wordt verstaan het verschuiven, draaien en spiegelen van (eenvoudige) figuren, het verkleinen en vergroten van figuren en het omstructureren of omvormen van figuren onder behoud van oppervlakte (zie ook de domeinbeschrijving meten). Een kernbegrip bij transformeren is symmetrie.

In de onderbouw gaat het bij transformeren bijvoorbeeld om:
- het werken met spiegelbeelden en symmetrie, het tekenen van figuren die een symmetrieas hebben en het bespreken waarop dan moet worden gelet. Hierbij spelen zaken zoals afstand en richting een rol.

In de bovenbouw gaat het bij transformeren bijvoorbeeld om:
- het onderzoeken en vergelijken van puntspiegelen, lijnspiegelen en draaiingen.

Construeren
Hierbij gaat het om het maken van (eenvoudige) meetkundige figuren, zoals bouwplaten, (ruimtelijke) modellen, schaaltekeningen en grafieken. Kernbegrippen zijn complementeren en omstructureren, die bij oppervlakte- en inhoudsberekeningen een belangrijke rol spelen (zie ook de domeinbeschrijving meten). Ook het (in eenvoudige gevallen) verklaren en toepassen van de effecten van vergroting en verkleining op omtrek, oppervlakte en inhoud vallen onder construeren.

In de onderbouw gaat het bij construeren bijvoorbeeld om:
- het onderscheiden en benoemen van meetkundige vormen, zoals cirkel, vierkant, rechthoek en driehoek.

In de bovenbouw gaat het bij construeren bijvoorbeeld om:
- het beschrijven en tekenen van aanzichten van blokkenbouwsels en het opstellen van schema's met hoogtegetallen. Evenzo omgekeerd: bouwsels construeren vanuit gegeven aanzichten en schema's met hoogtegetallen.

Visualiseren en representeren

Een visualisatie of representatie is een schematische weergave van een deel van de werkelijkheid. Denk aan zijaanzichten, perspectivische schetsen of schema's van een metronet.

In de onderbouw gaat het bij visualiseren en representeren bijvoorbeeld om:

- het tekenen van de verschillende routes over een rooster, een plattegrond of een getallenlijn.

bron: www.gvb.nl

In de bovenbouw gaat het bij visualiseren en representeren bijvoorbeeld om:

- het tekenen van uitslagen en bouwplaten van objecten, zoals een dobbelsteen (kubus), piramide, huisje, toren (balk) en eenvoudige boot.

5.3 Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang meetkunde

Meetkunde komen we overal tegen. Bij deelname aan het verkeer, sport, spel en dans, kunst, inrichting van de woning, bouwen en knutselen, bij het opruimen, bij het begrijpen van telefonie en waterleiding, bij logistiek, maar ook bij het begrijpen van lucht- en ruimtevaart.
Bij logistiek gaat het om 'de juiste dingen, op de juiste tijd, op de juiste plaats, in de juiste hoeveelheden tegen optimale kosten' (wikipedia). Voor het vinden van evenwicht tussen al deze logistieke factoren is meetkunde nodig. Bijvoorbeeld: kennis van vormen en formaten voor het bepalen van het juiste verpakkingsmateriaal passend in de verscheidenheid van magazijnrekken. Hetzelfde geldt in de wegenbouw.
In het verkeer speelt meetkunde een rol bij bijvoorbeeld routes en routebeschrijvingen.
De organisatie en het ordenen van het huishouden vraagt meetkundige inzichten en activiteiten. Hierbij spelen aspecten zoals oriënteren, lokaliseren, projecteren en redeneren een rol. Hetzelfde geldt in de bouw, de techniek en andere beroepen en activiteiten rond construeren, ontwerpen en opbouwen. Bij sport, spel en dans worden eigen bewegingsmogelijkheden (snelheid en richting) en die van anderen ingeschat, Dit geldt ook in de virtuele werkelijkheden van moderne computerspellen. Bij kunst en architectuur speelt bovendien het esthetische aspect van meetkunde.

Verstrengeling van meetkunde met andere reken-wiskundedomeinen

- De domeinen meten en meetkunde hangen nauw met elkaar samen. Bij meten vinden andere mentale handelingen plaats dan bij de meetkunde. Waar het bij meten gaat om het werken en toekennen van maten of maatgetallen, ligt bij de meetkunde het accent op ruimtelijke relaties en het beredeneren hiervan.
- De verstrengeling met het domein verhoudingen wordt zichtbaar bij meetkundeonderdelen waarbij verhoudingsgewijs redeneren een rol speelt, bijvoorbeeld bij viseren en schaduwen en bij meetkundige verhoudingen. Meetkundige verhoudingen worden aanvankelijk ook op aanschouwelijk niveau waargenomen. Bijvoorbeeld op foto's, waarop alles naar verhouding kleiner is dan in werkelijkheid. Als het perspectief in een tekening niet goed is aangebracht, wordt dat zichtbaar doordat verhoudingen niet kloppen. Hetzelfde geldt voor wanverhoudingen, zoals die worden gebruikt in cartoons.
- Informatieverwerking en verbanden: de interpretatie van een visuele voorstelling is hoe dan ook meetkundig, maar gebeurt niet altijd doordacht. Het beeld dat je ziet, roept associaties op. Bijvoorbeeld: een steilere helling in de lijngrafiek is bepaald door de opsteller. Dergelijke keuzes, zoals de verhouding tussen de reële gegevens en de assen van een grafiek, laten toe visuele indrukken te manipuleren.

Gebruik van meetkunde bij andere vak- en vormingsgebieden

- Verschillende vakken kennen raakpunten met meetkunde. Dat geldt vooral voor de wereldoriënterende vakgebieden, zowel ruimtelijk als natuurkundig. Ruimtelijk bijvoorbeeld bij schaal, tijdzones, plattegronden, kaartlezen, ruimtelijke inrichting en het schatten van afstanden. Natuurkundig als het gaat over vormen en verklaringen geven van natuurkundige verschijnselen zoals het optreden van dag en nacht.
- Bij beeldende vakken zijn meetkundige inzichten en activiteiten regelmatig nodig bij het construeren van beeldende objecten en versieringen. Bijvoorbeeld bij islamitische kunst, waarin symmetrie en transformaties een belangrijke rol spelen.
- Verder vormt meetkunde de basis voor techniek en technologische inzichten, zoals het interpreteren van bouwplannen en het maken van constructies (zie hieronder).
- Bij bewegingsonderwijs of sport is meetkunde nodig voor het inschatten van ieders eigen bewegingsmogelijkheden. Bijvoorbeeld bij het nemen van een strafcorner bij hockey of de buitenspelregel bij voetbal.

6. Verbanden

6.1 Kennis van verbanden

De startbekwame leerkracht kan gangbare grafieken en schema's gebruiken om informatie die zich daarvoor leent te representeren. Hij/zij kan grafieken lezen en vergelijken, en informatie uit grafieken op waarde schatten.

Niet alle informatie is even belangrijk. Het is de kunst om relevante informatie te scheiden van minder relevante (Mols, 2006). Dat is zeker het geval als (bewust of onbewust) een representatie is gekozen die onvoldoende of onjuiste gegevens bevat (of suggereert). Hierbij gaat het bijvoorbeeld om:

- de keuze van de assen en schaal bij (lijn)grafieken;
- de keuze voor een niet passende soort grafiek.

Verschillende typen grafieken

De lijngrafiek is waarschijnlijk de meest gebruikte grafiek. Daarnaast kennen we ook andere typen:

- cirkeldiagram;
- histogram;
- staafdiagram;
- stengel- en bladdiagram;
- blokdiagram;
- puntenwolk;
- stroomdiagram;
- beelddiagram.

Leerkrachten basisonderwijs zijn in staat om bij verschillende situaties passende representaties en grafieken te gebruiken.

Discrete en continue situaties

Lijngrafieken zijn (in ieder geval lokaal) continu en zijn daarom alleen geschikt om continue processen in beeld te brengen. Lijngrafieken worden veel gebruikt. Ze worden ook toegepast in situaties waarin ze feitelijk niet passen. Dat is het geval bij discrete situaties, waarin meet-resultaten onterecht door een (recht) lijnstuk worden verbonden.

Bij het maken van grafieken moet worden vastgesteld:

- welke representatie op een bepaald moment het meest adequaat is;
- hoe deze representatie kan worden gebruikt om de data zo effectief mogelijk weer te geven.

Wiskundetaal bij verbanden

Bij het domein informatieverwerking en verbanden speelt taal een grote rol bij het vertalen en lezen van informatie in grafieken (en omgekeerd). Onder de specifieke wiskundetaal vallen bijvoorbeeld:

- de namen van grafieken en de begrippen die daarbij worden gebruikt, zoals assen, legenda en dalen en stijgen;
- overige begrippen die worden gehanteerd bij het ordenen en representeren van informatie, zoals gemiddelde, sectoren, graden en minuten.

Hoewel deze begrippen niet tot de leerstof van de basisschool behoren, kan de startbekwame leerkracht betekenis geven aan bijvoorbeeld mediaan, modus en modaal, causaal en significant verband. Ook heeft hij/zij kennis van de grafische weergave van gegevens uit leerlingvolg-systemen.

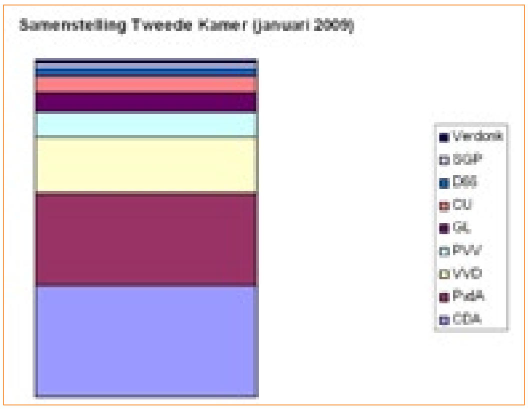
6.2 Kennis voor het onderwijzen van verbanden

De startbekwame leerkracht beschikt over de kennis van informatieverwerking en verbanden uit de voorgaande paragraaf en beheerst daarnaast de opbouw van de deelgebieden en leer-lijnen, voor zover deze al voor dit subdomein zijn ontwikkeld. Verder heeft hij/zij didactische kennis die het leren op de basisschool op gang brengt, ondersteunt en stimuleert, zoals het inzetten van de relatie tussen werkelijkheid en mogelijke wiskundige representaties, en het passend omgaan met informatie, bijvoorbeeld het ordenen en schematiseren van informatie.

Modelmatige representaties

Informatie kan vaak kernachtig in een modelmatige representatie worden weergegeven. Voorbeelden daarvan zijn:

- cirkel (sectordiagram);
- strook (figuur);
- (dubbele) getallenlijn;
- verhoudingstabel.



Leerkrachten basisonderwijs helpen hun leerlingen informatie te vertalen naar dergelijke representaties, waarbij de nadruk ligt op hoe de informatie uit de situatie helder naar voren komt in de compacte beschrijvingswijze.

Grafieken als representaties van de werkelijkheid

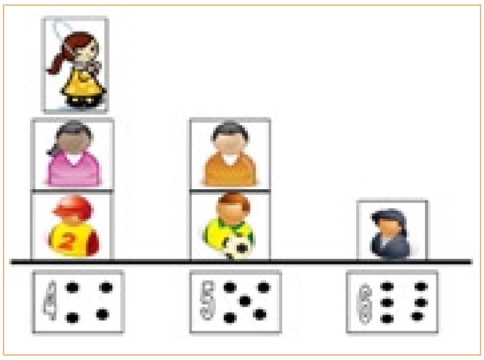
Grafieken vormen een abstrahering van de werkelijkheid. In het onderwijs grijpt het ontwik-kelen van grafieken daarom aan bij deze werkelijkheid. Kinderen leren grafieken kennen door bijvoorbeeld stroken van hun eigen lengte te maken en naast elkaar te hangen, of door kaartjes neer te leggen om de stand bij te houden. Geleidelijk worden grafieken op zichzelf staande representaties. Leerkrachten leren kinderen daarnaast om een bij een situatie passende grafiek te kiezen.

Schema's als gestructureerde kladjes

Greep krijgen op informatie betekent dat deze moet worden geordend. Dat kan in de vorm van grafieken of in de vorm van schema's. Schema's ontstaan door getallen (en andere data) enigszins gestructureerd te noteren. Vanuit een dergelijk kladje groeit stukje bij beetje een overzichtelijk schema, waarin de ruimtelijke positionering bijdraagt aan de betekenis en de getallen of data en het overzicht over het geheel. Deze aanpak
is een vorm van (horizontaal) mathematiseren; de dagelijkse praktijk wordt weergegeven met wiskundige middelen.

Niveauverhoging bij verbanden

Grafieken komen in alle groepen van de basisschool aan de orde. In de onderbouw ontstaat bijvoorbeeld een beeldgrafiek als kinderen een zelfportret bij de eigen leeftijd leggen.



In de bovenbouw worden grafieken gaandeweg abstracter. De leerlingen gebruiken bijvoorbeeld lijngrafieken om tijd-afstandrelaties in beeld te brengen en cirkelgrafieken om verhoudingen weer te geven. Zij leren dat op de assen verschillende variabelen kunnen worden weergegeven. Daarbij gaat het om het beschouwen van verschillende kwadranten en het interpreteren van assen die niet bij 0 beginnen. Ook het doorzien van misleidend weergegeven informatie in grafieken kan aan de orde worden gesteld.
Leerlingen leren ook de (moeilijke) notie 'gemiddelde' betekenis te geven in relatie tot grafieken, namelijk als de gemiddelde hoogte van een grafiek. Verder leren ze verband te leggen tussen verandering in een situatie en de weergave daarvan in een grafiek.

6.3 Maatschappelijke relevantie, verstrengeling en samenhang verbanden

De 21e eeuwse maatschappij is vooral een informatiemaatschappij. Veel informatie, bijvoorbeeld afkomstig van het internet, is schematisch van aard.

De nadruk op schematische informatie geldt in mindere mate ook voor informatie in andere media, zoals krant en televisie. Daarin wordt regelmatig gekozen voor de weergave in grafieken. Grafieken kunnen - mits goed gekozen - helpen bij het doorzien van verbanden zoals mechanismen en systemen.

Het maatschappelijk belang van dit domein wordt steeds groter. Het gaat daarbij om het selecteren van representaties om informatie weer te geven, maar vooral ook om het lezen en begrijpen van informatierepresentaties en het selecteren en waarderen van informatie, zoals het doorzien van misleidende representaties.

Verstrengeling van verbanden met andere reken-wiskundedomeinen

- Bij het rekenen tot 100 en 1.000 is de getallenlijn een prominent model. Dit model is vaak geschikt om getalsmatige informatie te ordenen en overzicht te bieden.
- Bij grafieken wordt vaak de getalsmatige informatie weergegeven, maar ook regelmatig de relatieve informatie in percentages.
- Meten en meetkunde: bij getalsmatige informatie betreft het in de regel meetgetallen. Wanneer de informatie niet getalsmatig is, gaat het vaak om informatie in termen van ruimte en tijd.

Gebruik van verbanden bij andere vak- en vormingsgebieden

Het verwerken van informatie is bij uitstek het terrein waar rekenen-wiskunde aan andere vak- en vormingsgebieden raakt. Het gaat dan bijvoorbeeld om de zogenoemde zaakvakken, waarin regelmatig grafieken en tabellen worden gebruikt om informatie weer te geven. Het typeert aan de andere kant nadrukkelijk het raakvlak tussen wiskunde en taal.

7. Legitimering

De kennisbasis rekenen-wiskunde is opgesteld door goede vakleerkrachten die enerzijds actief zijn als opleider op de pabo en die daarnaast door middel van publicaties, congresbijdragen etc. de aandacht op zich gevestigd hebben. Dit is overeenkomstig de adviezen van de commissies Dijsselbloem over de onderwijsvernieuwingen en Meijerink over de doorlopende leerlijnen voor taal en rekenen. Niettemin is het voor de legitimering van de kennisbasis van belang dat ook externe experts over de kennisbasis hebben kunnen meepraten.

In individuele gesprekken of in groeps-bijeenkomsten is met deskundigen van binnen en buiten de pabo-wereld diepgaand gesproken over onder meer:

- inhoudelijke keuzes
- structuur en diepgang
- wetenschappelijke verantwoording
- studeerbaarheid en toetsing
- betekenis voor het primair onderwijs
- maatschappelijke relevatie.

Uit deze gesprekken zijn nieuwe, ingrijpend verbeterde versies ontstaan en dit gegeven, gecombineerd met de positieve beoordeling van de gesprekspartners in kwestie verschaft de kennisbasis rekenen-wiskunde een brede legitimering in de wereld van onderwijs en wetenschap.

Externe deskundigen

Dhr. Gert Gelderblom (voorzitter)
Expertgroep rekenverbetertrajecten in het primair onderwijs bij de PO-Raad
Expertise: rekenen leren en onderwijzen in het basisonderwijs en nascholing zittende leraren
Drs. Kees Hoogland
Senior consultant Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, methodeschrijver e.a.
Expertise: wiskunde (als schoolvak)
Dhr. Frank Jansma
Onderzoeker en beleidsmedewerker bij de Stichting Beroepskwaliteit van Leraren en ander onderwijspersoneel (SBL)
Expertise: competentiesystematiek, beroepskwaliteit leraren
Prof. Dr. Joost Klep
Justus Liebig Universität, Giessen (Duitsland)
Expertise: didactiek van de wiskunde
Prof. Dr. Jos Letschert
Hoogleraar curriculumstudies Universiteit Twente, ambtelijk secretaris Expertgroep Doorlopende Leerlijnen (Commissie Meijerink), lector innovatie, grondlegger Nederlands Centrum voor Curriculum Studies (NECCS) en European Association for Educational Design (EED)
Expertise: kerndoelen en leerlijnen, onderwijsinnovatie, curriculumontwerp
Drs. Edith van Montfort
Directeur Stichting Beroepskwaliteit van Leraren en ander onderwijspersoneel (SBL), oud-pabodirecteur
Expertise: beroepskwaliteit leraren

Prof. Dr. Anne van Streun
Emeritus hoogleraar Rijksuniversiteit Groningen
Expertise: didactiek en opleidingskunde voor rekenen-wiskunde

Dr. Jaap Vedder
Oud-inspecteur, oud-pabodirecteur, voorzitter Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-wiskundeonderwijs (NVORWO), voorzitter Regionaal Convenant Primair Onderwijs Meppel Emmeloord Steenwijk (RCPO MES)
Expertise: wiskundig, opleidingskundig, bestuurlijk

Prof. Dr. Lieven Verschaffel
Hoogleraar Katholieke Universiteit van Leuven, Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen/rekencommissie
Expertise: methodologie en techniek van het wiskundeonderwijs

Dr. Kees Vreugdenhil
Oud-directeur Algemeen Pedagogisch Studiecentrum, oud-leider pabo-project, onderwijsconsultant, lid diverse accreditatiepanels bij de Nederlands-Vlaamse Accreditatie Organisatie
Expertise: competentiegericht opleiden

Prof. Dr. Bert Zwaneveld
Hoogleraar Open Universiteit en Ruud de Moor Centrum
Expertise: wiskunde, professionalisering ten behoeve van wiskunde- en informaticaonderwijs

Interne experts

Voor de beoordeling en bespreking van de inhoud, proces en implementatie van de kennisbases voor de vakken Nederlandse taal en rekenen-wiskunde op de pabo zijn op verschillende momenten deskundigen uit de wereld van de opleidingen benaderd. Daarin zijn vier hoofdstromen te onderscheiden:

1. opleidersnetwerken (Elwier en Panama),
2. de Resonansgroep Kennisbasis Pabo, samengesteld uit experts van verschillende pabo's,
3. de vakgroepvoorzitters rekenen-wiskunde van alle pabo's, aangevuld met een aantal onderwijskundigen en teamleiders eveneens uit de pabo's,
4. veldadviescommissies, de wettelijk voorgeschreven adviesorganen bestaande uit vertegenwoordigers van het "werkveld" van iedere pabo, de basisscholen in de regio.

Colofon

Kennisbasis Rekenen-Wiskunde

Auteurs
M. van Zanten
F. Barth
J. Faarts
A. van Gool
R. Keijzer

Eindredactie
De Tekstgroep, Delft

Fotografie
Hester Blankestijn

Vormgeving
Elan Strategie & Creatie, Delft

Drukwerk
Quantes, Rijswijk

December 2009